ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«КАМЧАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КамчатГТУ»)

Факультет информационных технологий, экономики и управления

Кафедра «Физика и высшая математика»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель НОЦ ПиР
_____ Л. М. Хорошман
«29» 04 2025 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Математика»

Направление подготовки 35.03.10 «Ландшафтная архитектура»
(уровень бакалавриата)

профиль:
«Благоустройство и озеленение территорий и объектов»

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 00DAEF4242FC032F2C499575FE5951C0B2
Владелец ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ "КАМЧАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ"
Действителен с 11.06.2024 по 04.09.2025

Петропавловск-Камчатский
2025

Рабочая программа составлена на основании ФГОС ВО для специальности 35.03.10 «Ландшафтная архитектура» и учебного плана ФГБОУ ВО «КамчатГТУ»

Составитель рабочей программы

Зав. кафедрой, доцент, к.т.н. _____ А.И. Задорожный
(должность, ученое звание, степень) (подпись) (Ф.И.О.)

Рабочая программа рассмотрена на заседании кафедры «Физика и высшая математика»
(наименование кафедры)

Протокол № 4 от « 20 » января 2025 года.

Зав. кафедрой

«20» января 2025 года. _____ А.И. Задорожный
(подпись) (Ф.И.О.)

1 Цели и задачи учебной дисциплины

Целью изучения дисциплины «Математика» является формирование у будущих специалистов знаний и умения применять изучаемые методы при анализе и управлении современными сложными системами, освоение методов математической статистики для конкретных инженерных задач. Математика является не только мощным средством решения прикладных задач и универсальным языком науки, но также и элементом общей культуры. Поэтому математическое образование следует рассматривать как важнейшую составляющую фундаментальной подготовки специалиста.

2 Требования к результатам освоения дисциплины

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование следующих компетенций:

ОПК-1 – способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий.

Планируемые результаты обучения при изучении дисциплины, соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы, представлены в таблице.

Таблица № 1

Планируемые результаты обучения при изучении дисциплины, соотнесенные с установленными в программе бакалавриата индикаторами достижения компетенций.

Код компетенции	Планируемые результаты освоения образовательной программы	Код и наименование индикатора достижений	Планируемый результат обучения по дисциплине	Код показателя освоения
ОПК-1	Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий	**ИД-1 опк-1** **Знать:** Знает основные понятия и терминологию ландшафтоведения и ландшафтной архитектуры; факторы формирования и особенности структуры природных и рукотворных ландшафтов	**Знать:** – основные факты, понятия, определения и теоремы современной математической науки и их возможности для решения инженерных задач, алгоритмы решения типовых задач.	З(ОПК-1)1
			Уметь: – применять теоретические знания для решения задач, применять алгоритмы, выполнять основные математические расчеты, составлять и решать простейшие математические модели, адаптировать решения для вычислительной техники.	У(ОПК-1)1

Код компетенции	Планируемые результаты освоения образовательной программы	Код и наименование индикатора достижений	Планируемый результат обучения по дисциплине	Код показателя освоения
			Владеть: – методами решения математических задач и методами построения моделей.	В(ОПК-1)1

3 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Учебная дисциплина «Математика» относится к обязательной части дисциплин, ее изучение основано на курсе математики средней школы.

Теоретические знания и практические навыки, сформированные у студентов в процессе изучения дисциплины «Математика», являются базовыми при изучении следующих дисциплин ФГОС ВО в части: «Геодезия», «Гидрология, климатология и метеорология», «Экономика».

4 Содержание дисциплины

4.1 Тематический план дисциплины

1 семестр

Таблица № 2

Тематический план дисциплины (заочная форма обучения)

Наименование разделов и тем	**Всего часов**	**Аудиторные занятия**	**Контактная работа по видам учебных занятий**			**Самостоятельная работа**	**Формы текущего контроля**	**Итоговый контроль знаний по дисциплине**
			Лекции	**Семинары (практические занятия)**	**Лабораторные работы**			
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
Тема 1 «Введение. Элементы комбинаторики. Определители»	9	2	1	1		7	Опрос, решение задач	
Тема 2 «Матрицы и действия над ними»	7					7	Опрос, решение задач	
Тема 3 «Системы линейных уравнений»	9	2	1	1		7	Опрос, решение задач	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тема 4 «Системы координат. Векторы и действия над ними»	7					7	Опрос, решение задач	
Тема 5 «Прямая на плоскости. Плоскости и прямые в пространстве»	9	2	1	1		7	Опрос, решение задач	
Тема 6 «Кривые второго порядка»	8					8	Опрос, решение задач, контрольная работа	
Тема 7 «Последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 8 «Пределы. Непрерывные функции»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 9 «Производная и ее свойства Геометрический и физический смысл производной»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 10 «Основные теоремы о дифференцируемых функциях»	8					8	Опрос, решение задач, контрольная работа	
Тема 11 «Понятие функции нескольких переменных»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 12 «Производные функции нескольких переменных»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 13 «Исследование на экстремум функции нескольких переменных. Матрица Гесса»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 14 «Комплексные числа и действия над ними»	8					8	Опрос, решение задач, контрольная работа	
Тема 15 «Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных дробей»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 16 «Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений Тригонометрические подстановки. Подстановки Эйлера. Подстановки Чебышева»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 17 «Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Применение определенных интегралов»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тема 18 «Несобственные интегралы»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 19 «Двойные интегралы. Применение двойных интегралов»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 20 «Тройные интегралы»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач, контрольная работа	
Тема 21 «Числовые ряды. Сходимость числовых рядов. Признаки Даламбера, Коши, Коши Мак-Лорена. Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 22 «Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Мак-Лорена и Тейлора»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 23 «Понятие дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 24 «Однородные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач	
Тема 25 «Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка однородные»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 26 «Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка неоднородные»	10	2	1	1		8	Опрос, решение задач, контрольная работа	
Тема 27 «Алгебра событий. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 28 «Схема последовательных испытаний Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Закон больших чисел в формулировке теоремы Бернулли»	8					8	Опрос, решение задач	

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Тема 29 «Случайные величины. Функция распределения случайной величины. Плотность вероятности случайной величины. Числовые характеристики случайной величины. Законы распределения случайных величин»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 30 «Нормальный закон распределения случайных величин. Закон больших чисел»	8					8	Опрос, решение задач	
Тема 31 «Основные понятия математической статистики. Выборочный метод. Эмпирическая функция распределения случайной величины. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик случайной величины»	8					6	Опрос, решение задач	
Тема 32 «Проверка статистических гипотез. Вывод уравнения линейной регрессии методом наименьших квадратов»	8					6	Опрос, решение задач, контрольная работа	
Экзамен								9
Всего	288	28	14	14		251		9

4.2 Содержание дисциплины

Тема 1 «Введение. Элементы комбинаторики. Определители»

Лекция

Предмет, объект, цели и задачи дисциплины. Программа курса, ее реализация во времени. Требования к итоговой аттестации. Литература.

Основные понятия темы: перестановки, сочетания, размещения, определители второго, третьего и n-го порядков, свойства определителей.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 2 «Матрицы и действия над ними»

Лекция

Матрицы и действия над ними: Сложение матриц, умножение матрицы на число, транспонирование, умножение матриц, нахождение обратной матрицы.

Основные понятия темы: матрицы.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 3 «Системы линейных уравнений»
Лекция
Системы линейных уравнений. Решение систем линейных уравнений с квадратной матрицей. Методы Крамера, Гаусса, обратной матрицы. Системы линейных уравнений с неквадратной матрицей. Базисное решение системы. Частное решение системы. Системы совместные, системы определенные. Альтернатива Крамера. Теорема Кронекера-Капелли.

Основные понятия темы: системы линейных уравнений, метод Крамера, метод Гаусса, метод обратной матрицы, базисное решение системы, частное решение системы, системы определенные, альтернатива Крамера, теорема Кронекера-Капелли.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 4 «Системы координат. Векторы и действия над ними»
Лекция
Системы координат на плоскости и в пространстве: декартова, полярная, цилиндрическая. сферическая. Переход от одной системы к другой. Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов. Преобразование координат. Базис.

Основные понятия темы: система координат, произведение векторов, преобразование координат, базис.

Практическое занятие
Форма занятия: миниконференция
Примерные темы докладов:
1. Евклидово пространство.
2. N – мерное линейное векторное пространство.
3. Частные случаи расположения плоскости.
4. Взаимное расположение прямой и плоскости
5. Линейные операторы. Естественный трехгранник.
6. Натуральное уравнение кривой.

Тема 5 «Прямая на плоскости. Плоскости и прямые в пространстве»

Лекция

Уравнение прямой проходящей через заданную точку в направлении заданного вектора. Уравнение прямой проходящей через заданную точку перпендикулярно данному вектору. Уравнение прямой проходящей через две заданных точки. Общее уравнение прямой. Нормальное уравнение прямой. Параметрическое уравнение прямой. Различные уравнения плоскости и прямой в пространстве. Общее уравнение плоскости. Нормальное уравнение плоскости. нормирующий множитель. Частные случаи расположения плоскости. Взаимное расположение прямой и плоскости.

Основные понятия темы: уравнения прямой, уравнение плоскости, нормирующий множитель.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 6 «Кривые второго порядка»

Лекция

Эллипс. Парабола. Гипербола. Классификация кривых второго порядка.

Основные понятия темы: эллипс, парабола, гипербола.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Типовое задание:

1. Найти методами Крамера и обратной матрицы решение системы линейных алгебраических уравнений Ax=b, где

$$A=\begin{matrix}3&2&1\\1&4&1\\2&1&4\end{matrix}\qquad b=\begin{matrix}1\\2\\1\end{matrix}$$

2. При заданных матрицах A и B найти матрицы

a. 2A-3B

в. (A+2B)(A-B)

$$A=\begin{matrix}1&3&5\\6&5&4\\3&4&4\end{matrix}\qquad B=\begin{matrix}7&4&4\\3&5&6\\2&4&3\end{matrix}$$

c. Вычислить определитель матрицы B

d. Найти матрицу обратную к матрице A.

3. Вычислить определитель двумя способами

$$\begin{matrix}1&3&4&0\\2&3&5&1\\0&2&3&2\\3&4&6&1\end{matrix}$$

Тема 7 «Последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины»

Лекция

Понятие множества. Операции над множествами. Понятие окрестности точки. Последовательности, способы задания последовательностей. Бесконечно малые величины и их свойства, сравнение бесконечно

малых величин, связь между бесконечно малыми и бесконечно большими величинами. Свойства числовых множеств и последовательностей.

Основные понятия темы: множества, окрестность точки, последовательности, бесконечно большая величина, бесконечно малая величина.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 8 «Пределы. Непрерывные функции»
Лекция
Пределы последовательностей и функций. Свойства пределов. Первый и второй замечательные пределы. Непрерывность функции в точке. Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва функции. Классификация точек разрыва функций. Основные теоремы о непрерывных функциях.

Основные понятия темы: предел последовательностей, предел функций, первый замечательный предел, второй замечательный предел.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 9 «Производная и ее свойства Геометрический и физический смысл производной. Дифференциал и его свойства»
Лекция
Функциональная зависимость. Точечные множества в N – мерном пространстве. Определение производной. основные свойства производной. Производная как тангенс угла наклона касательной в точке вычисления производной. Скорость, ускорение. Производные стандартных функций. таблица производных Дифференциал и его свойства. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.

Основные понятия темы: функциональная зависимость, скорость, ускорение, дифференциал.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 10 «Основные теоремы о дифференцируемых функциях»
Лекция
Теорема о непрерывности дифференцируемой функции. Теорема Ферма. Теорема Роля. Теорема Лагранжа. Теорема Коши. Правило Лопиталя.

Основные понятия темы: теорема о непрерывности дифференцируемой функции, теорема Ферма, теорема Роля, теорема Лагранжа, теорема Коши, правило Лопиталя

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 11 «Понятие функции нескольких переменных»
Лекция
Функции нескольких переменных. Пределы функции нескольких переменных. Непрерывность функции нескольких переменных.

Основные понятия темы: функция нескольких переменных.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 12 «Производные функции нескольких переменных»
Лекция
Производные функции нескольких переменных. Частные производные. Теорема о смешанных производных. Дифференциал функции нескольких переменных.

Основные понятия темы: производные функции нескольких переменных, частные производные, дифференциал функции нескольких переменных.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 13 «Исследование на экстремум функции нескольких переменных. Матрица Гесса»
Лекция
Необходимые и достаточные условия экстремума функции нескольких переменных. Седловая точка. Матрица Гесса.

Основные понятия темы: условия экстремума, седловая точка, матрица Гесса.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 14 «Комплексные числа и действия над ними»
Лекция

Комплексные числа. форма комплексных чисел, тригонометрическая форма комплексных чисел, экспоненциальная форма комплексных чисел. Сложение, вычитание. умножение, деление комплексных чисел в алгебраической форме, умножение, деление, возведение в степень комплексных чисел в тригонометрической и экспоненциальной форме. Формула Меллина. Формула Эйлера.

Основные понятия темы: комплексные числа, формула Меллина, формула Эйлера.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 15 «Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных дробей»

Лекция

Первообразная. Теорема о первообразных. Определение неопределенного интеграла. Свойства неопределенного интеграла. Непосредственное интегрирование. Вычисление интегралов стандартных функций исходя из определения неопределенного интеграла. Формула интегрирования по частям. Таблица интегралов Теоремы о разложении правильных рациональных дробей. Интегрирование простейших дробей.

Основные понятия темы: первообразная, неопределенный интеграл, непосредственное интегрирование, интегрирование по частям.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 16 «Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений Тригонометрические подстановки. Подстановки Эйлера. Подстановки Чебышева»

Лекция

Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений Тригонометрические подстановки. Подстановки Эйлера. Подстановки Чебышева. Замены для интегрирования тригонометрических выражений. универсальная тригонометрическая подстановка.

Основные понятия темы: тригонометрические выражения, интегрирование иррациональных выражений, подстановки Эйлера, подстановки Чебышева.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 17 «Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Применение определенных интегралов»

Лекция

Определение определенного интеграла. Интегральные суммы. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Вычисление площади плоской фигуры. Вычисление длины дуги. Вычисление площади поверхности фигуры вращения. Вычисление объема фигуры вращения. Вычисление статических моментов и моментов инерции. Вычисление работы и давления. Нахождение координат центра тяжести.

Основные понятия темы: определенный интеграл, интегральные суммы, формула Ньютон-Лейбница.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 18 «Несобственные интегралы»

Лекция

Несобственные интегралы первого рода. Сходимость несобственных интегралов первого рода. Несобственные интегралы второго рода. Сходимость несобственных интегралов второго рода.

Основные понятия темы: несобственные интегралы.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 19 «Двойные интегралы. Применение двойных интегралов»

Лекция

Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений. Тригонометрические подстановки. Подстановки Эйлера. Подстановки Чебышева. Замены для интегрирования тригонометрических выражений. универсальная тригонометрическая подстановка.

Основные понятия темы: интегрирование тригонометрических выражений, тригонометрические подстановки, подстановки Эйлера, подстановки Чебышева.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 20 «Тройные интегралы»

Лекция

Построение интегральной суммы по пространственной области. Тройные интегралы и их свойства. Геометрический смысл тройного интеграла. Замена переменных в тройных интегралах. Якобиан. Применение тройных интегралов. Вычисление объема тела. Нахождение массы тела. Нахождение координат центра тяжести тела. Нахождение момента инерции тела.

Основные понятия темы: тройные интегралы, Якобиан.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Типовое задание:

1. $\int\left(\sin 3x - 2x^4 + \frac{3}{x^2+5}\right)dx$ 2. $\int \frac{e^x dx}{e^e + 1}$ 3. $\int \frac{x+2}{x^2+3x-1}dx$

4. $\int \frac{(x-1)^3}{\sqrt{x-2}}dx$ 5. $\int x^2 \cdot e^x dx$ 6. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

7. $\int \frac{dx}{3+4\cos x}$ 8. $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$

Тема 21 «Числовые ряды. Сходимость числовых рядов. Признаки Даламбера, Коши, Коши Мак-Лорена. Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница»

Лекция

Основные понятия числовых рядов. Сумма ряда. Сходимость числовых рядов. Необходимое условие сходимости числовых рядов. Теоремы сравнения. Признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак сходимости Коши Мак-Лорена. Знакопеременные ряды. Типы сходимости знакопеременных рядов. Признак сходимости Лейбница.

Основные понятия темы: числовой ряд, теоремы сравнения, признаки сходимости Даламбера, Коши, интегральный признак сходимости Коши Мак-Лорена, признак сходимости Лейбница.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 22 «Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Мак-Лорена и Тейлора»

Лекция

Основные понятия функциональных рядов. Сумма функционального ряда. Область сходимости функционального ряда, Типы сходимости функциональных рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля об области сходимости степенных рядов. Ряды Мак-Лорена и Тейлора. Разложение стандартных функций в ряд Мак-Лорена.

Основные понятия темы: функциональные ряды, область сходимости функционального ряда, степенные ряды, теорема Абеля, ряд Мак-Лорена, ряд Тейлора.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 23 «Понятие дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»

Лекция

Основные понятия дифференциальных уравнений. Общее и частное решение дифференциального уравнения. Линии уровня. Интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.

Основные понятия темы: дифференциальные уравнения, линии уровня, интегрирование дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 24 «Однородные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка»

Лекция

Однородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения, приводимые к линейным первого порядка. Замена для решения однородных дифференциальных уравнений. Приведение дифференциальных уравнений к однородным.

Основные понятия темы: однородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка, неоднородные линейные дифференциальные уравнения первого порядка, дифференциальные уравнения, приводимые к линейным первого порядка.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 25 «Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка однородные»

Лекция

Решение линейных однородных дифференциальных уравнений n-го порядка. Характеристическое уравнение. Случай простых действительных корней характеристического уравнения. Случай кратных действительных корней характеристического уравнения. Случай простой пары комплексно сопряженных кор-

ней характеристического уравнения. Случай кратных пар комплексно сопряженных корней характеристического уравнения.

Основные понятия темы: линейные дифференциальные уравнения n-ого порядка однородные.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 26 «Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка неоднородные»
Лекция
Решение линейных неоднородных дифференциальных уравнений n-го порядка, нахождение частного решения неоднородного уравнения по виду правой части. Метод вариации произвольной постоянной. Определитель Вронского.

Основные понятия темы: определитель Вронского, метод вариации произвольной постоянной.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Типовое задание:
1. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $e^{x+3y}dy=xdx$
2. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'+y=x\sqrt{y}$
3. Найти общий интеграл дифференциального уравнения $y-xy'=\sec(y/x)$
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $(1-x2)y''-xy=2$
5. Решить задачу Коши $4y''+3y'-y=11\cos x-7\sin x\ y(0)=-2, y'(0)=0$

Тема 27 «Алгебра событий. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса»
Лекция
Случайные события. Сумма событий. Произведение событий. Полная группа событий. Совместность и несовместность событий. Зависимость и независимость событий. Статистический подход к определению вероятности случайного события. Вероятностное пространство. Классическое и геометрическое определения вероятности. Теоремы сложения вероятности совместных и несовместных событий. Теоремы умножения вероятностей зависимых и независимых событий. Формула полной вероятности. Гипотезы. Апостериорная вероятность гипотез. Постериорная вероятность гипотез. Формула Байеса.

Основные понятия темы: случайные ситуации, сумма событий, произведение событий, постериорная вероятность гипотез, формула Байеса.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 28 «Схема последовательных испытаний Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Закон больших чисел в формулировке теоремы Бернулли»

Лекция

Схема последовательных испытаний Бернулли. Формула Бернулли. Теорема Пуассона. Локальная теорема Муавра-Лапласа. Интегральная теорема Муавра-Лапласа. Закон больших чисел в формулировке теоремы Бернулли.

Основные понятия темы: схема последовательных испытаний Бернулли, формула Бернулли, теорема Пуассона, локальная теорема Муавра-Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа, закон больших чисел в формулировке теоремы Бернулли,

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 29 «Случайные величины. Функция распределения случайной величины. Плотность вероятности случайной величины. Числовые характеристики случайной величины. Законы распределения случайных величин»

Лекция

Случайные величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Закон распределения случайной величины. Функция распределения случайной величины. Плотность вероятности распределения случайной величины. Математическое ожидание и его свойства. Дисперсия и ее свойства. Средне квадратическое отклонение. Мода. Медиана. Модели законов распределения вероятностей, наиболее употребляемые в социально-экономических приложениях. Равномерное распределение. Биномиальное распределение. Распределение Стьюдента.

Основные понятия темы: случайные величины, среднее квадратическое отклонение, мода, медиана, распределения.

Практическое занятие

Форма занятия: решение типовых задач

Задания:

Решение задач из [2].

Тема 30 «Нормальный закон распределения случайных величин. Закон больших чисел»

Лекция

Нормальный закон распределения случайных величин. Параметры нормального закона распределения случайных величин. График плотности вероятности нормально распределенной случайной величины. Правило трех сигм. Закон больших чисел в виде неравенств Чебышева. Закон больших чисел в формулировке теоремы Чебышева. Закон больших чисел в формулировке теоремы Бернулли. Центральная предельная теорема.

Основные понятия темы: нормальный закон распределения случайных величин, правило трех сигм, закон больших чисел в виде неравенств Чебышева, теорема Бернулли, центральная предельная теорема.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

Тема 31 «Основные понятия математической статистики. Выборочный метод. Эмпирическая функция распределения случайной величины. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик случайной величины»

Лекция

Основные понятия математической статистики, генеральная совокупность и выборка. Способы построения выборки. Типы выборок. Полигон частот. Гистограмма. Эмпирическая функция распределения случайной величины. Свойства эмпирической функции распределения. График эмпирической функции распределения. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Оценки параметров точечные и интервальные. Смещенные и несмещенные, эффективные и неэффективные, состоятельные и несостоятельные оценки. Доверительный интервал для математического ожидания генеральной совокупности при известном среднем квадратическом отклонении для нормального закона.

Основные понятия темы: генеральная совокупность, выборка, полигон частот, гистограмма, эмпирическая функция распределения.

Практическое занятие
Форма занятия: миниконференция
Примерные темы докладов:

1. Сравнение нескольких дисперсий. Критерий Бартлетта.
2. Сравнение нескольких дисперсий. Критерий Кочрена.
3. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента ранговой корреляции. Критерий Спирмена.
4. Проверка гипотезы о значимости выборочного коэффициента ранговой корреляции. Критерий Кендалла.
5. Критерий Фишера.
6. Критерий χ^2.

Тема 32 «Проверка статистических гипотез. Вывод уравнения линейной регрессии методом наименьших квадратов»

Лекция

Статистическое оценивание и проверка гипотез. Основные понятия проверки статистических гипотез. Типы конкурирующих гипотез. Критическая область. Ошибки первого и второго рода. Уровень значимости. Критерии. Типы зависимостей между величинами. Корреляционная зависимость. Корреляция и регрессия. Метод наименьших квадратов. Коэффициент корреляции и его свойства. Коэффициент ковариации и его свойства.

Основные понятия темы: критическая область, ошибки первого рода, ошибки второго рода, уровень значимости, корреляционная зависимость, корреляция, регрессия, метод наименьших квадратов, коэффициент ковариации.

Практическое занятие
Форма занятия: решение типовых задач
Задания:
Решение задач из [2].

СРС
Изучение учебной литературы [1], [2]
Решение задач по темам
Подготовка к модульному контролю

5 Учебно-методическое обеспечение для самостоятельной работы обучающихся

В целом внеаудиторная самостоятельная работа студента при изучении курса включает в себя следующие виды работ:

— проработка (изучение) материалов лекций;
— чтение и проработка рекомендованной основной и дополнительной литературы;
— подготовка к практическим (семинарским) занятиям;
— поиск и проработка материалов из Интернет-ресурсов, периодической печати;
— выполнение домашних заданий в форме творческих заданий, кейс-стадии, докладов;
— подготовка презентаций для иллюстрации докладов;
— выполнение контрольной работы, если предусмотрена учебным планом дисциплины;
— подготовка к текущему и итоговому (промежуточная аттестация) контролю знаний по дисциплине (экзамен).

Основная доля самостоятельной работы студентов приходится на проработку рекомендованной литературы с целью освоения теоретического курса, подготовку к практическим (семинарским) занятиям, тематика которых полностью охватывает содержание курса. Самостоятельная работа по подготовке к семинарским занятиям предполагает умение работать с первичной информацией.

6 Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине

6.1 Структура фонда оценочных средств

Фонд оценочных средств для проведения промежуточной аттестации обучающихся по дисциплине «Математика» представлен в приложении к рабочей программе дисциплины и включает в себя:

–перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образования; перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы;

– описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания;

– типовые контрольные задания или материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций;

– методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций.

6.2 Перечень вопросов к промежуточной аттестации.

1. Системы координат на плоскости и в пространстве.
2. Базис. Координаты вектора.
3. Векторы и линейные операции с ними, скалярное, векторное и смешанное произведение векторов, их свойства и вычисление.
4. N – мерное линейное векторное пространство. Линейные операторы
5. Естественный трехгранник.
6. Уравнение прямой на плоскости:

- проходящей через две точки
- проходящей через заданную точку в данном направлении
- проходящей через данную точку и имеющей данную нормаль
- уравнение прямой в отрезках
-общее уравнение прямой
- проходящей через заданную точку с заданным угловым коэффициентом
-нормальное уравнение прямой
-параметрическое уравнение прямой

7. Деление отрезка в данном отношении.
8. Расстояние между двумя точками.
9. Уравнение плоскости: проходящей через три точки, имеющее заданную нормаль, в отрезках, общее, нормальное.
10. Натуральное уравнение кривой.
11. Формулы Бонне.
12. Системы окрестностей.
13. Топологическая эквивалентность.
14. Гомотопия.
15. Формула Эйлера.
16. Эллипс и его основные свойства.
17. Гипербола и ее основные свойства.
18. Парабола и ее основные свойства.
19. Основные понятия комбинаторной математики. Сочетания, размещения и перестановки.
20. Определители и их основные свойства. Вычисление определителей разложением по строке или столбцу.
21. Матрицы и действия над ними. Обратная матрица и ее вычисление.
22. Системы линейных алгебраических уравнений и основные методы их решения. Решение систем линейных алгебраических уравнений с помощью обратных матриц.
23. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера. Схема исключения Гаусса в матричной форме. Системы линейных уравнений с неквадратной матрицей.
24. Проекция вектора на ось и ее свойства.
25. Понятие множества. Операции над множествами. Понятие окрестности точки.
26. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности, связь между ними.
27. Пределы последовательностей.
28. Предел переменной и его св-ва. Основные теоремы о пределах.
29. Правило Лопиталя.
30. Производная функции, ее геометрический и механический смыслы. Производная сложной функции. Производная обратной функции. Основные правила вычисления производной.
31. Дифференциал функции, его геометрический смысл и св-ва.
32. Применение дифференциала к приближенным вычислениям.
33. Основные теоремы о дифференцируемых функциях - Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.

34. Формула Тейлора
35. Экстремум функции одного переменного. Необходимые и достаточные условия экстремума.
36. Частные производные функции нескольких переменных.
37. Экстремум функции нескольких Переменных.
38. Необходимые и достаточные условия. Матрица Гессе.
39. Формула Тейлора для функций нескольких переменных.
40. Комплексные числа и действия над ними.
41. Неопределенный интеграл и его свойства. Табличные интегралы.
42. Замена переменных и метод интегрирования по частям.
43. Интегрирование рациональных дробей
44. Интегрирование простейших дробей первого типа
45. Интегрирование простейших дробей второго типа
46. Интегрирование простейших дробей третьего типа
47. Интегрирование простейших дробей четвертого типа
48. Интегрирование тригонометрических выражений
49. Интегрирование тригонометрических выражений Универсальная тригонометрическая подстановка.
50. Интегрирование иррациональных выражений. Тригонометрические подстановки.
51. Интегрирование иррациональных выражений. Подстановки Эйлера.
52. Интеграл от биномиального дифференциала. Подстановки Чебышева.
53. Определенный интеграл и его основные свойства.
54. Формула Ньютона-Лейбница.
55. Замена переменных и метод интегрирования по частям.
56. Приложения определенного интеграла
57. Понятие несобственного интеграла.
58. Кратные интегралы
59. Применение кратных интегралов.
60. Основные понятия числовых рядов.
61. Необходимый признак сходимости рядов.
62. Теоремы сравнения
63. Достаточные признаки Даламбера, Коши.
64. Интегральный признак Коши-Маклорена.
65. Основные понятия функциональных рядов.
66. Типы сходимостей функциональных рядов.
67. Степенные ряды. Основные теоремы о степенных рядах.
68. Понятие о дифференциальном уравнении. Общее и частное решения.
69. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными
70. Однородные дифференциальные уравнения
71. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным.
72. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка
73. Дифференциальные уравнения, приводимые к линейным первого порядка.
74. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами однородные.
75. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами неоднородные.
76. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка
77. Системы дифференциальных уравнений.
78. События. Алгебра событий.
79. Классическая вероятность и ее вычисление.
80. Несовместность и независимость событий.

81. Теорема умножения вероятностей. Условная вероятность
82. Формула полной вероятности.
83. Формула Байеса.
84. Схема последовательных испытаний. Формула Бернулли.
85. Формула Лапласа в схеме Бернулли.
86. Интегральная формула Муавра-Лапласа в схеме Бернулли.
87. Случайные величины.
88. Функция распределения и ее свойства.
89. Плотность распределения вероятности и ее свойства.
90. Математическое ожидание случайной величины и его свойства.
91. Дисперсия случайной величины и ее свойства.
92. Неравенство Чебышева.
93. Закон больших чисел. Различные его формулировки.
94. Совместная функция распределения системы случайных величин и ее свойства.
95. Плотность распределения совместной вероятности системы нескольких случайных величин.
96. Нормальный закон распределения, его основные параметры. Правило трех сигм.
97. Корреляционная зависимость. Построение прямой регрессии.
98. Функция распределения и ее свойства.
99. Формула Пуассона в схеме Бернулли.
100. Среднее квадратическое отклонение случайной величины и его свойства.
101. Линейная корреляция
102. Теорема сложения вероятностей.
103. Формула Лапласа в схеме Бернулли.
104. Неравенство Чебышева.
105. Коэффициент корреляции и его свойства.
106. Доверительный интервал для математического ожидания генеральной совокупности при известном среднем квадратическом отклонении для нормального закона.
107. Доверительный интервал для математического ожидания генеральной совокупности при известном среднем квадратическом отклонении для нормального закона.
108. Вычисление теоретических частот в критерии Пирсона.
109. Коэффициент ковариации и его свойства.
110. Основные понятия теории статистической проверки статистических гипотез.
111. Критерий согласия Пирсона.
112. Точечные оценки для дисперсии генеральной совокупности.
113. Точечные оценки для математического ожидания генеральной совокупности.
114. Типы и классификация статистических оценок.
115. Эмпирическая функция распределения, полигон и гистограмма.
116. Основные понятия выборочного метода.
117. Коэффициент корреляции и его свойства.

7 Рекомендуемая литература

7.1 Основная литература

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления в 2-х томах: Учебник для втузов - М: Интеграл-Пресс, 2003 г., 544

7.2 Дополнительная литература

2. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. - Санкт-Петербург.: Лань, 2008. - 239с.

3. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие: в 2 ч. – М.: Высшая школа, 1999

8. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «интернет»

– ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» [учебные, научные здания, первоисточники, художественные произведения различных издательств; журналы; мультимедийная коллекция: аудиокниги, аудиофайлы, видеокурсы, интерактивные курсы, экспресс-подготовка к экзаменам, презентации, тесты, карты, онлайн-энциклопедии, словари]: сайт. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red.

– ЭБС издательства «Лань» [учебные, научные издания, первоисточники, художественные произведения различных издательств]: сайт. – Режим доступа: http://e.lanbook.com.

– ЭБС «Юрайт» [учебники и учебные пособия издательства «Юрайт»]: сайт. – Режим доступа: https://www.biblio-online.ru/catalog/

– ЭБС «Znanium.com» [учебные, научные, научно-популярные материалы различных издательств, журналы]: сайт. – Режим доступа: http://znanium.com/.

– Тематический сборник: числа, дроби, сложение, вычитание и пр. Теоретический материал, задачи, игры, тесты: сайт. – Режим доступа: http://www.numbernut.com/

– Интернет-портал Math.ru, посвящен математике (и математикам), предназначен для студентов, педагогов и для всех, кто интересуется математикой. На сайте найдутся книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни учёных сайт. – Режим доступа: http://www.math.ru/;

– Научная электронная библиотека статей и публикаций «eLibrary.ru»: российский информационно-аналитический портал в области науки, технологии, медицины, образования [5600 журналов, в открытом доступе – 4800]: сайт. – Режим доступа: http://www.elibrary.ru

– использование слайд-презентаций;

– интерактивное общение с обучающимися и консультирование посредством Интернет, используя социальные сети, специализированные программы (например, zoom), а также электронной почты;

– использование электронной информационно-образовательной среды.

9 Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины

Методика преподавания данной дисциплины предполагает чтение лекций, проведение практических занятий, групповых и индивидуальных консультаций по отдельным (наиболее сложным) специфическим проблемам дисциплины. Предусмотрена самостоятельная работа студентов, а также прохождение аттестационных испытаний промежуточной аттестации (экзамен и зачет).

Лекции посвящаются рассмотрению основным понятиям, наиболее важных теоретических вопросов. В ходе лекций студентам следует подготовить конспекты лекций: кратко, схематично, последовательно фиксировать основные положения, выводы, формулировки, обобщения; помечать важные мысли, выделять ключевые слова, термины; обозначить вопросы, термины, материал, который вызывает трудности, пометить и попытаться найти ответ в рекомендуемой литературе. Если самостоятельно не удается разобраться в материале, необходимо сформулировать вопрос и задать преподавателю на консультации, на практическом занятии.

Целью проведения практических занятий является закрепление знаний студентов, полученных ими в ходе изучения дисциплины на лекциях и самостоятельно. Во время практических занятий решаются задачи по рассматриваемым в курсе лекций темам, применятся основные понятия, теоремы, свойства. Студент должен научится решать базовые задачи по каждой теме, а также применять полученные навыки для ре-

шения реальных прикладных задач

При изучении дисциплины используются интерактивные методы обучения, например, лекция-визуализация, предполагающая подачу материала с использованием технических средств обучения с краткими комментариями демонстрируемых материалов (презентаций).

10. Курсовой проект (работа)

Выполнение курсового проекта (работы) не предусмотрено учебным планом.

11. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса по дисциплине, включая перечень программного обеспечения и информационно-справочных систем

11.1. Перечень информационных технологий, используемых при осуществлении образовательного процесса

– ЭБС «Университетская библиотека ONLINE» [учебные, научные здания, первоисточники, художественные произведения различных издательств; журналы; мультимедийная коллекция: аудиокниги, аудиофайлы, видеокурсы, интерактивные курсы, экспресс-подготовка к экзаменам, презентации, тесты, карты, онлайн-энциклопедии, словари]: сайт. – Режим доступа: http://biblioclub.ru/index.php?page=main_ub_red.

– ЭБС издательства «Лань» [учебные, научные издания, первоисточники, художественные произведения различных издательств]: сайт. – Режим доступа: http://e.lanbook.com.

– ЭБС «Юрайт» [учебники и учебные пособия издательства «Юрайт»]: сайт. – Режим доступа: :https://www.biblio-online.ru/catalog/

– ЭБС «Znanium.com» [учебные, научные, научно-популярные материалы различных издательств, журналы]: сайт. – Режим доступа: http://znanium.com/.

– Тематический сборник: числа, дроби, сложение, вычитание и пр. Теоретический материал, задачи, игры, тесты: сайт. – Режим доступа: http://www.numbernut.com/

– Интернет-портал Math.ru, посвящен математике (и математикам), предназначен для студентов, педагогов и для всех, кто интересуется математикой. На сайте найдутся книги, видео-лекции, занимательные математические факты, различные по уровню и тематике задачи, отдельные истории из жизни учёных сайт. – Режим доступа: http://www.math.ru/;

– использование слайд-презентаций;
– интерактивное общение с обучающимися и консультирование посредством Интернет, используя социальные сети, специализированные программы (например, zoom), а также электронной почты;
– использование электронной информационно-образовательной среды.

11.2. Перечень программного обеспечения, используемого при осуществлении образовательного процесса

При освоении дисциплины используется лицензионное программное обеспечение:

1. операционные системы Astra Linux (или иная операционная система, включенная в реестр отечественного программного обеспечения);
2. комплект офисных программ Р-7 Офис (в составе текстового процессора, программы работы с электронными таблицами, программные средства редактирования и демонстрации презентаций);
3. программа проверки текстов на предмет заимствования «Антиплагиат».
4. интернет-браузеры;
5. программы обмена электронной почтой.

12. Материально-техническое обеспечение дисциплины

На кафедре имеется 8 аудитории для проведения лекционных и практических занятий, расположенных во 2 и 7 корпусе.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «КАМЧАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «КамчатГТУ»)

Факультет информационных технологий, экономики и управления

Кафедра «Физика и высшая математика»

УТВЕРЖДАЮ
Руководитель НОЦ ПиР
_____ Л.М. Хорошман
«29» 04 2025 г.

ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ
по дисциплине

«Математика»

Направление подготовки 35.03.10 «Ландшафтная архитектура»
(уровень бакалавриата)

профиль:
«Благоустройство и озеленение территорий и объектов»

Петропавловск-Камчатский,
2025

Составитель фонда оценочных средств:
Заведующий кафедрой ФВМ, к.т.н., доцент _____ Задорожный А.И.

Фонд оценочных средств рассмотрен на заседании кафедры «Физика и высшая математика»
«20» января 2025 г., протокол № 4

Заведующий кафедрой «Физика и высшая математика»
«20» января 2025 г. А.И. Задорожный

АКТУАЛЬНО НА

202_/202_ учебный год _____ А.И. Задорожный
(подпись)

202_/202_ учебный год _____ А.И. Задорожный
(подпись)

1. Перечень компетенций с указанием этапов их формирования в процессе освоения образовательной программы

Схема формирования компетенций ОПК-1 в процессе освоения образовательной программы 35.03.10 «Ландшафтная архитектура»						
Код дисциплины из УП	Наименование дисциплины (в соответствии с УП)	1 курс	2 курс	3 курс	4 курс	5 курс
ОПК-1 Способен решать типовые задачи профессиональной деятельности на основе знаний основных законов математических и естественных наук с применением информационно-коммуникационных технологий						
Б1.О.14	Математика	Э				
Б1.О.15	Начертательная геометрия	ЗО				
Б1.О.16	Биологические основы ландшафтной архитектуры	Э	Э			
Б1.О.17	Почвоведение с основами агрохимии	ЗО				
Б1.О.18	Ботаника	Э				
Б1.О.22	Физиология растений		Э			
Б1.О.23	Геоморфология с основами геопластики		З			
Б1.О.25	Ландшафтоведение		Э			
Б1.О.26	Гидрология, климатология и метеорология		Э			
Б1.О.27	Геодезия		З			
Б1.О.31	Теория ландшафтной архитектуры и методология проектирования			Э		
Б1.О.32	Основы благоустройства и озеленения территорий			З		
Б1.О.35	Типология объектов ландшафтной архитектуры				Э	
Б1.О.37	Технологии и оборудование в ландшафтном строительстве				ЗО	
Б1.О.ДВ.02.01	Особо охраняемые природные территории			З		
Б1.О.ДВ.02.02	Землеустройство			З		
Б2.О.01	Учебная практика	ЗО	ЗО			
Б2.О.01.01(У)	Ознакомительная практика	ЗО				
Б2.О.01.02(У)	Творческая практика		ЗО			
Б3.01(Д)	Выполнение и защита выпускной квалификационной работы					Защита ВКР

1.1. Паспорт ФОС

Контролируемые разделы (темы) дисциплины	**Код контролируемой компетенции или ее части**	**Наименование оценочного средства**
Тема 1 «Введение. Элементы комбинаторики. Определители»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 2 «Матрицы и действия над ними»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 3 «Системы линейных уравнений»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 4 «Системы координат. Векторы и действия над ними»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 5 «Прямая на плоскости. Плоскости и прямые в пространстве»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 6 «Кривые второго порядка»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 7 «Последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 8 «Пределы. Непрерывные функции»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 9 «Производная и ее свойства Геометрический и физический смысл производной»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 10 «Основные теоремы о дифференцируемых функциях»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 11 «Понятие функции нескольких переменных»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 12 «Производные функции нескольких переменных»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 13 «Исследование на экстремум функции нескольких переменных. Матрица Гесса»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 14 «Комплексные числа и действия над ними»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 15 «Первообразная и ее свойства. Неопределенный интеграл и его свойства. Интегрирование рациональных дробей»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 16 «Интегрирование тригонометрических выражений. Интегрирование иррациональных выражений Тригонометрические подстановки. Подстановки Эйлера. Подстановки Чебышева»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 17 «Определенный интеграл и его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Применение определенных интегралов»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 18 «Несобственные интегралы»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 19 «Двойные интегралы. Применение двойных интегралов»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 20 «Тройные интегралы»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)

Тема 21 «Числовые ряды. Сходимость числовых рядов. Признаки Даламбера, Коши, Коши Мак-Лорена. Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 22 «Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Ряды Мак-Лорена и Тейлора»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 23 «Понятие дифференциального уравнения. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 24 «Однородные дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения, приводимые к однородным. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 25 «Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка однородные»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 26 «Линейные дифференциальные уравнения n-го порядка неоднородные»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 27 «Алгебра событий. Определение вероятности. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности и Байеса»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 28 «Схема последовательных испытаний Бернулли. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Закон больших чисел в формулировке теоремы Бернулли»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 29 «Случайные величины. Функция распределения случайной величины. Плотность вероятности случайной величины. Числовые характеристики случайной величины. Законы распределения случайных величин»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 30 «Нормальный закон распределения случайных величин. Закон больших чисел»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 31 «Основные понятия математической статистики. Выборочный метод. Эмпирическая функция распределения случайной величины. Точечные и интервальные оценки числовых характеристик случайной величины»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)
Тема 32 «Проверка статистических гипотез. Вывод уравнения линейной регрессии методом наименьших квадратов»	ОПК-1	**Опрос, тест, решение задач:** З(ОПК-1) У(ОПК-1), В(ОПК-1)

2. Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

2.1 Описание показателей и критериев оценивания компетенций на различных этапах их формирования

Код компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине	Критерии оценивания результатов обучения*				
		1	2	3	4	5
ОПК-1 Знает основные понятия и терминологию ландшафтоведния и ландшафтной архитектуры; факторы формирования и особенности структуры природных и рукотворных ландшафтов	**Знать:** – основные факты, понятия, определения и теоремы современной математической науки и их возможности для решения инженерных задач, алгоритмы решения типовых задач.	Не сформированы знания по большей или наиболее важной части учебного материала	Фрагментарные знания по изучаемой дисциплине	Неполные представления о вопросе	Определенные пробелы в знаниях	Сформированы системные представления по основным вопросам изучаемой дисциплины
	Уметь: – применять теоретические знания для решения задач, при-менять алгоритмы, выполнять основные математические расчеты, составлять и решать простейшие математические модели, адаптировать решения для вычислительной техники.	Отсутствие умений. Данный результат указывает на несформированность порогового уровня умений	Фрагментарные умения	Несистемное использование знаний	Несистематическое использование умений	Сформированное умение использовать полученные знания
	Владеть: – методами решения математических задач и методами построения моделей.	Отсутствие навыков	Фрагментарные навыки	В целом успешное, но не систематическое применение навыков.	В целом успешное, но содержащее определенные пробелы применения навыков.	Успешное и систематическое применение навыков.

**1* - Неудовлетворительная оценка результатов обучения. Отсутствие знаний, умений, навыков. Данный результат указывает на несформированность порогового уровня знаний, умений, навыков.

2 - Неудовлетворительная оценка результатов обучения. Фрагментарные знания, умения, навыки.

3 - Удовлетворительная оценка результатов обучения. Несистематическое использование знаний, умений, навыков.

4 - Удовлетворительная оценка результатов обучения. Определенные пробелы. В целом, успешное использование знаний, умений, навыков.

5 - Удовлетворительная оценка результатов обучения. Успешное и систематическое применение знаний, умений, навыков

2.2 Описание шкал оценивания

Формы контроля	Шкала оценивания
устный опрос	**Оценка «отлично»:** ответы на поставленные вопросы излагаются четко, логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений, делаются обоснованные выводы, демонстрируются глубокие знания базовых нормативных и правовых актов, соблюдаются нормы литературной речи. **Оценка «хорошо»:** ответы на поставленные вопросы излагаются систематизировано и последовательно, материал излагается уверенно, демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят

	аргументированный и доказательный характер, соблюдаются нормы литературной речи, обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала. **Оценка «удовлетворительно»**: допускаются нарушения в последовательности изложения ответов на поставленные вопросы, демонстрируются поверхностные знания вопроса, имеются затруднения с выводами, допускаются нарушения норм литературной речи. **Оценка «неудовлетворительно»:** материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определенной системы знаний по дисциплине, имеются заметные нарушения норм литературной речи, обучающийся допускает существенные ошибки в ответах на вопросы, не ориентируется в понятийном аппарате
индивидуальные устные опросы по разделам (модулям) дисциплины (промежуточный контроль знаний)	**Оценка «отлично»:** ответы на поставленные вопросы по разделу (модулю) излагаются четко, логично, последовательно и не требуют дополнительных пояснений, делаются обоснованные выводы, демонстрируются глубокие знания базовых нормативных и правовых актов, соблюдаются нормы литературной речи. **Оценка «хорошо»:** ответы на поставленные вопросы по разделу (модулю) излагаются систематизировано и последовательно, материал излагается уверенно, демонстрируется умение анализировать материал, однако не все выводы носят аргументированный и доказательный характер, соблюдаются нормы литературной речи, обучающийся демонстрирует хороший уровень освоения материала. **Оценка «удовлетворительно»**: допускаются нарушения в последовательности изложения ответов на поставленные по разделу (модулю) вопросы, демонстрируются поверхностные знания вопросов, изученных в данном разделе (модуле), имеются затруднения с выводами, допускаются нарушения норм литературной речи. **Оценка «неудовлетворительно»:** материал излагается непоследовательно, сбивчиво, не представляет определенной системы знаний по разделу (модулю) дисциплины, имеются заметные нарушения норм литературной речи, обучающийся допускает существенные ошибки в ответах на вопросы, не ориентируется в понятийном аппарате.
решение (анализ) ситуационных задач	**Оценка «отлично»:** задание выполнено в полном объеме, проведен системный анализ ситуации, выявлены проблемы, требующие решения, даны обоснованные рекомендации. **Оценка «хорошо»:** задание выполнено в полном объеме, содержание рекомендаций соответствует проблеме, при этом обоснования не представлены. **Оценка «удовлетворительно»**: в целом задание выполнено правильно, при этом системный анализ проблемы проведен слабо (или не проведен), рекомендации даны без обоснования. **Оценка «неудовлетворительно»:** в обосновании допущены ошибки, рекомендации не систематизированы или отсутствуют.
решение заданий в тестовой форме	Для оценивания результатов ***тестирования*** возможно использовать следующие критерии оценивания: – правильность ответа или выбора ответа. – скорость прохождения теста. – наличие правильных ответов во всех проверяемых темах (дидактических единицах) теста. Общее количество вопросов принимается за 100%, оценка выставляется по значению соотношения количества правильных ответов к общему количеству вопросов в процентах. **Оценка «отлично» –** 80–100% правильных ответов; **Оценка «хорошо» –** 61–79% правильных ответов; **Оценка «удовлетворительно»** – 45–60% правильных ответов; **Оценка «неудовлетворительно» –** 44% и менее правильных ответов.
выполнение практических заданий	**Оценка «отлично»** выставляется обучающемуся, чей результат анализа ситуации оказался наиболее всесторонним, чье решение или расчет ока-

	зался наиболее продуманным, логичным и предусматривающим большее количество альтернативных вариантов решений; **Оценка «хорошо»** выставляется обучающемуся, использовавшему методику или инструмент анализа с незначительными нарушениями, чей расчет имеет незначительные погрешности; **Оценка «удовлетворительно»** выставляется каждому обучающемуся, чей расчет имеет нарушения, но в целом задание выполнено, анализ проведен поверхностно, в том числе с нарушением методики его проведения; **Оценка «неудовлетворительно»** выставляется каждому обучающемуся, если анализ проведен в нарушение методики его проведения, результаты не обоснованы, не сделаны выводы, расчет произведен с грубыми нарушениями и не соответствует поставленной задаче.
выполнение контрольной работы (внеаудиторной)	**Оценка «отлично»:** работа отвечает четырем критериям; **Оценка «хорошо»** работа отвечает трем критериям; **Оценка «удовлетворительно»** работа отвечает двум критериям; **Оценка «неудовлетворительно»** работа не отвечает критериям оценки. Критерии: 1. Знание и понимание теоретического материала. – определяет рассматриваемые понятия четко и полно, приводя примеры; – материал строго соответствует теме; – самостоятельность выполнения работы. 2. Анализ и оценка информации: – грамотно применяет инструменты и категории анализа; – умело использует приемы сравнения и обобщения для анализа взаимосвязи понятий и явлений; – способен проанализировать альтернативные взгляды на вопрос и прийти к сбалансированному самостоятельному заключению; – использует значительное число источников информации; – дает личную оценку проблеме. 3. Построение суждений: – ясность и четкость изложения материала; – выдвигаемые тезисы сопровождаются аргументацией; – приводятся различные точки зрения и их оценка; – форма изложения материала соответствует жанру проблемной научной статьи. 4. Оформление работы: – в соответствии с требованиями к оформлению данного вида работ; – соблюдение лексических, фразеологических, грамматических и стилистических норм русского языка; – в соответствии с правилами орфографии и пунктуации русского языка.
Экзамен	**Оценка «отлично» («зачтено»)** выставляется, если обучающийся показывает всесторонние и глубокие знания программного материала, знание основной и дополнительной литературы; последовательно и четко отвечает на вопросы билета и дополнительные вопросы; уверенно ориентируется в проблемных ситуациях; демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, делать правильные выводы, проявляет творческие способности в понимании, изложении и использовании программного материала; подтверждает полное освоение компетенций, предусмотренных программой. **Оценка «хорошо»** выставляется, если обучающийся показывает полное знание программного материала, основной и дополнительной литературы; дает полные ответы на теоретические вопросы, допуская некоторые неточности; правильно применяет теоретические положения к оценке практических ситуаций; демонстрирует хороший уровень освоения материала и в целом подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой. **Оценка «удовлетворительно»** выставляется, если обучающийся пока-

	зывает знание основного материала в объеме, необходимом для предстоящей профессиональной деятельности; при ответе на вопросы не допускает грубых ошибок, но испытывает затруднения в последовательности их изложения; не в полной мере демонстрирует способность применять теоретические знания для анализа практических ситуаций, подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой на минимально допустимом уровне. **Оценка «неудовлетворительно» («не зачтено»)** выставляется, если обучающийся имеет существенные пробелы в знаниях основного учебного материала по разделу; не способен аргументировано и последовательно его излагать, допускает грубые ошибки в ответах, неправильно отвечает на задаваемые преподавателем вопросы или затрудняется с ответом; не подтверждает освоение компетенций, предусмотренных программой.

Итоговое оценивание обучающегося по дисциплине «Математика»

Для оценки качества подготовки студента по дисциплине в целом составляется рейтинг – интегральная оценка результатов всех видов деятельности студента, осуществляемых в процессе ее изучения.

Промежуточный контроль проводится по окончании семестра, в котором изучается дисциплина, в соответствии с рабочим учебным планом по направлению подготовки.

Преподаватель на вводной лекции (первом занятии) знакомит обучающихся академической группы с программой учебной дисциплины, в том числе с процедурой начисления баллов модульно-рейтинговой системы, графиком, формами и процедурой прохождения текущего контроля, а также примерными вопросами для подготовки к промежуточному контролю.

Промежуточный контроль – это форма контроля теоретических знаний, полученных студентом в процессе изучения всей учебной дисциплины или ее части, и умения их применять в практической деятельности. Он должен учитывать выполнение студентом всех видов работ, предусмотренных программой дисциплины, в том числе самостоятельную работу, участие в семинарах, выполнение контрольных работ.

Показатели, критерии оценки форсированности компетенции, шкала оценивания результатов освоения компетенций по уровням освоения представлены в таблице.

Уровень освоения	Критерии освоения	Показатели и критерии оценки сформированности компетенции	Шкала оценивания (традиционная оценка)
Продвинутый	*Компетенции сформированы.* Демонстрируется высокий уровень самостоятельности, высокая адаптивность практического навыка	Теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество их выполнения оценено на «отлично». Обучаемый демонстрирует способность к полной самостоятельности (допускаются консультации с преподавателем по сопутствующим вопросам) в выборе способа решения неизвестных или нестандартных заданий в рамках учебной дисциплины с использованием ***знаний, умений и навыков,*** полученных как в ходе освоения данной учебной дисциплины, так и смежных дисциплин.	«отлично»/зачтено

Базовый	*Компетенции сформированы.* Демонстрируется достаточный уровень самостоятельности устойчивого практического навыка	Теоретическое содержание курса освоено полностью, без пробелов необходимые практические навыки работы с освоенным материалом сформированы недостаточно, все предусмотренные программой обучения учебные задания выполнены, качество выполнения ни одного из них не оценено минимальной оценкой, некоторые виды заданий выполнены с несущественными ошибками. Качество выполнения заданий оценено преимущественно на «хорошо». Способность обучающегося продемонстрировать самостоятельное применение ***знаний, умений и навыков*** при решении заданий, аналогичных тем, которые представлял преподаватель при потенциальном формировании компетенции, подтверждает наличие сформированной компетенции, причем на более высоком уровне	«хорошо»/зачтено
Пороговый	*Компетенции сформированы.* Демонстрируется недостаточный уровень самостоятельности практического навыка	Теоретическое содержание курса освоено частично, но пробелы не носят существенного характера, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом в основном сформированы, большинство предусмотренных программой обучения учебных заданий выполнено, некоторые из выполненных заданий, возможно, содержат ошибки. Качество выполнения заданий оценено преимущественно на «удовлетворительно». Если обучаемый демонстрирует самостоятельность в применении знаний, умений и навыков к решению учебных заданий в полном соответствии с образцом, данным преподавателем, по заданиям, решение которых было показано преподавателем, следует считать, что компетенция сформирована, но ее уровень недостаточно высок.	«удовлетворительно»/зачтено
Низкий	*Компетенции не сформированы* Демонстрируется отсутствие *или* фрагментарное наличие самостоятельности и практического навыка	Теоретическое содержание курса не освоено, необходимые практические навыки работы с освоенным материалом не сформированы, выполненные учебные задания содержат грубые ошибки. Неспособность обучаемого самостоятельно продемонстрировать наличие ***знаний*** при решении заданий, которые были представлены преподавателем вместе с образцом их решения, отсутствие самостоятельности в применении ***умения*** к использованию методов освоения учебной дисциплины и неспособность самостоятельно проявить ***навык*** повторения решения поставленной задачи по стандартному образцу свидетельствуют об отсутствии сформированной компетенции.	«неудовлетворительно»/не зачтено

3. Типовые контрольные задания или материалы, необходимые для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1 «ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА»

ВАРИАНТ №1

Задание 1. Дана система линейных уравнений. Доказать ее совместность и решить тремя способами:

1) по формулам Крамера;
2) методом Гаусса;
3) средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2 \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3 \end{cases}$$

Задание 2. Даны координаты вершин пирамиды $A_1A_2A_3A_4$. Найти:

1) угол между ребрами A_1A_2 иA_1A_3;
2) площадь сечения, проходящего через середину ребра A_1A_4 и вершины пирамиды A_2 и A_3;
3) объем пирамиды;
4) уравнение прямой A_1A_4;
5) уравнение плоскости $A_1A_2A_3$;
6) угол между прямой A_1A_4 и плоскостью $A_1A_2A_3$.

A_1	A_2	A_3	A_4
(–4; –3; 0)	(0; 4; 0)	(2; 2; –5)	(–2; 7; 6)

Задание 3. Даны три силы $\overline{F_1}(x;y;z), \overline{F_2}(x;y;z), \overline{F_3}(x;y;z)$, приложенные к точке A. Вычислить:

1) работу, которую производит равнодействующая этих сил, когда ее точка приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку B;
2) момент равнодействующей этих сил относительно точки B.

$\overline{F_1}$	$\overline{F_2}$	$\overline{F_3}$	A	B
(3; –2; 4)	(–4; 3; –3)	(3; 4; 2)	(1; –4; 3)	(4; 0; –2)

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2 «ПРЕДЕЛЫ»

ВАРИАНТ №1

Задание 1. Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3+1}{2x^3+2x-3}$ б) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{21x-3}}{x-7}$

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 \cdot \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$ г) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$

Задание 2. Исследовать функцию на непрерывность, сделать схематический чертеж:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x < -1 \\ x^3+2, & -1 \le x \le 1 \\ \sqrt{x} & x \ge 1 \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №3 «ПРОИЗВОДНЫЕ»

ВАРИАНТ №1

1. $y = ctg^5 4x$

2. $y = \ln\sqrt{x} \cdot \arccos(2x+1)$

3. $y = \sqrt[3]{arctg(\cos x)}$

4. $y = \dfrac{e^{-tg^{2x}}}{\sin 5x}$

5. $y = (1+2x)^{x^2}$

6. $y = \dfrac{(x-3)^2 \cdot (x+3)^5}{\sqrt[3]{2x-7}}$

7. $\begin{cases} x = \sin t + t^2 \\ y = \cos t - t^3 \end{cases}$

8. $\ln y + \dfrac{y}{x} = 0$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №4 «ИНТЕГРАЛЫ»

ВАРИАНТ №1.

1. $\int\left(\sin 3x - 2x^4 + \dfrac{3}{x^2+5}\right)dx$

2. $\int \dfrac{e^x dx}{e^x + 1}$

3. $\int \dfrac{x+2}{x^2+3x-1}dx$

4. $\int \dfrac{(x-1)^3}{\sqrt{x-2}}dx$

5. $\int x^2 \cdot e^x dx$

6. $\int \dfrac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}}dx$

7. $\int \dfrac{dx}{3+4\cos x}$

8. $\int \dfrac{(x+1)dx}{\sqrt{(x+2)(x+3)}}$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №5 «ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»

ВАРИАНТ №1

1.Найти общее решение (общий интеграл) дифференциального уравнения 1 порядка.

$$y'\cos x = \frac{y}{\ln y}$$

2.Найти частное решение (частный интеграл) дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальному условию.

$$y' + 2xy = x^2y^2 \quad y(0) = 1$$

3.Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее начальным условиям.

$$y'' - 4y' + 5y = 5x - 4 \qquad \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 3 \end{cases}$$

4.Найти общее решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y - 2z \\ \dfrac{dz}{dx} = -3y + 6z \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №6 «РЯДЫ»

ВАРИАНТ №1

1. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5-2n}{0.3^n}$

2. Исследовать ряд на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} arctg\frac{2}{\sqrt{n}}$

3. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-3)^{n-1}\sin\frac{1}{n}}{n^2}$

4. Вычислить значение функции $f(x) = x^3\cos 3x$ при $x = \frac{\pi}{10}$ с точностью $\varepsilon = 0.001$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №7 «ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА»

ВАРИАНТ 1

1. Колода из 36 карт хорошо перемешана (т. е. все возможные расположения карт равновероятны). Найти вероятности события: *A* {четыре туза расположены рядом}

2. Прибор, установленный на борту самолета, может работать в двух режимах: в условиях нормального крейсерского полета и в условиях перегрузки при взлете и посадке. Крейсерский режим полета осуществляется в 80% всего времени полета, условия перегрузки—20 %, Вероятность выхода прибора из строя за время полета в нормальном режиме равна 0,3, в условиях перегрузки— 0,4. Вычислить надежность прибора за время полета.

3. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,4. Найти наименьшее число испытаний *n,* при котором с вероятностью 0,97 можно ожидать, что относительная частота появлений события отклонится от его вероятности по абсолютной величине не более чем на 0,01.

4.Найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение дискретной случайной величины, имеющей следующий закон распределения. Построить график интегральной функции распределения

x	3	4	5	6	7	8	9
p	0,2	0,1	0,2	0,2	0,1	0,15	0,05

5.Найти выборочное среднее, выборочную и уточненную выборочную дисперсии, простроить статистическую функцию распределения и гистограмму относительных частот по следующей выборке:

1,7,2,7,8,9, 3,4,5,6,7,8,7,2,5,6,7,1,7,2,7,8,9, 3,2, 1,7,2,7,8,9, 3,5,4,6,5,6,8,7,1,9,8,7,8,1,1,2.

4. Перечень вопросов к промежуточной аттестации

1. Определители, их основные свойства, вычисление.
2. Матрицы и действия над ними.
3. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера.
4. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом обратной матрицы.
5. Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.
6. Ранг матрицы, вычисление ранга матрицы.
7. Решение методом Гаусса произвольных систем линейных алгебраических уравнений.
8. Исследование однородных систем линейных алгебраических уравнений. Нахождение фундаментальной системы решений.
9. Вектор на плоскости и в пространстве.
10. Проекция вектора на оси системы координат.
11. Линейные операции над векторами.
12. Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление.
13. Векторное произведение векторов, его свойства, вычисление.
14. Смешанное произведение векторов, его свойства, вычисление.
15. Базис векторов на плоскости и в пространстве.
16. Разложение вектора по базису векторов на плоскости и в пространстве.
17. Понятие n – мерного абстрактного математического пространства.
18. Линейные операторы. Собственные значения линейного оператора.
19. Квадратичные формы.
20. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через заданную точку.
21. Уравнение прямой на плоскости, проходящей через две заданные точки.
22. Общее уравнение прямой на плоскости.
23. Точка пересечения прямых на плоскости.
24. Угол между пересекающимися прямыми на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности, прямых на плоскости.
25. Уравнение прямой на плоскости в заданном направлении.
26. Расстояние от точки до прямой.
27. Деление отрезка в заданном отношении.
28. Канонические уравнения окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
29. Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку.
30. Общее уравнение плоскости.
31. Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки.
32. Угол между плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей.
33. Уравнения прямой в пространстве.
34. Угол между прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых.
35. Пересечение прямой и плоскости.
36. Параллельность и перпендикулярность прямой и плоскости.
37. Поверхности второго порядка.
38. Числовые множества и действия над ними.

39. Понятие функции одной переменной.
40. Область определения и область значений функции одной переменно.
41. Способы задания функции одной переменной.
42. Четность и нечетность функции одной переменной.
43. Основные элементарные функции. Преобразование графиков.
44. Числовая последовательность и ее свойства.
45. Предел числовой последовательности, и его свойства.
46. Основные теоремы о пределах последовательностей.
47. Признаки существования предела.
48. Предел функции в точке и на бесконечности.
49. Замечательные пределы.
50. Бесконечно большие и бесконечно малые величины, их свойства.
51. Сравнение бесконечно малых. Эквивалентность бесконечно малых.
52. Односторонние пределы.
53. Классификация точек разрыва.
54. Разрывы 1-го и 2-го рода.
55. Непрерывность функции одной переменной.
56. Производная функции ее геометрический и механический смыслы.
57. Вычисление производной элементарной функции.
58. Производные основных элементарных функций.
59. Правила дифференцирования.
60. Производная сложной функции.
61. Метод логарифмического дифференцирования.
62. Дифференцирование неявно заданных и параметрически заданных функций.
63. Дифференциал функции одной переменной его геометрический смысл.
64. Применение дифференциала для приближенных вычислений.
65. Производные и дифференциалы высших порядков.
66. Формула Тейлора.
67. Возрастание и убывание функций.
68. Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.
69. Экстремум функции.
70. Необходимые и достаточные условия экстремума функции.
71. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.
72. Выпуклость и вогнутость графика функции.
73. Точка перегиба графика функции.
74. Асимптоты графика функции.
75. Общая схема исследования функции одной переменной.
76. Первообразная функции одной переменной.
77. Неопределенный интеграл и его свойства.
78. Табличные интегралы элементарных функций.
79. Метод непосредственного интегрирования.
80. Интегрирование функций методом замены переменной.
81. Интегрирование функций методом интегрирования по частям.
82. Интегрирование рациональных алгебраических дробей.
83. Интегрирование иррациональных функций.
84. Интегрирование тригонометрических функций.
85. Определенный интеграл и его геометрический смысл.
86. Формула Ньютона-Лейбница.
87. Вычисление определенных интегралов методом замены переменной.
88. Вычисление определенных интегралов методом интегрирования по частям.
89. Понятие несобственных интегралов 1-го и 2-го рода.
90. Понятие функции нескольких переменных.
91. Предел и непрерывность функции нескольких переменных.
92. Частные производные первого порядка.
93. Дифференциал функции нескольких переменных, приближенные вычисления на его основе.

94. Производная по направлению. Градиент.
95. Частные производные второго порядка.
96. Экстремум функции нескольких переменных.
97. Необходимые и достаточные условие экстремума.
98. Наибольшее и наименьшее значение функции нескольких переменных.
99. Понятие условного экстремума функции нескольких переменных.
100. Метод множителей Лагранжа.
101. Кратные интегралы.
102. Повторные интегралы.
103. Криволинейные интегралы. 1-го и 2-го рода.
104. Поверхностные интегралы 1-го и 2-го рода.
105. Элементы теории поля.
106. Понятие о дифференциальном уравнении.
107. Теорема о существовании единственности решения.
108. Общее и частное решения дифференциального уравнения.
109. Дифференциальные уравнения с разделенными переменными.
110. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.
111. Однородные дифференциальные уравнения.
112. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.
113. Уравнение Бернулли.
114. Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах. Интегрирующий множитель.
115. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.
116. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков.
117. Однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.
118. Неоднородные дифференциальные с постоянными коэффициентами.
119. Системы дифференциальных уравнений.
120. Основные понятия числовых рядов.
121. Необходимый признак сходимости рядов.
122. Признаки Даламбера, Коши, интегральный признак Коши-Маклорена.
123. Знакопеременные ряды.
124. Знакочередующиеся ряды. Теорема Лейбница.
125. Основные понятия функциональных рядов.
126. Степенные ряды. Основные теоремы о степенных рядах.
127. Разложение функции в ряд Тейлора и Маклорена
128. Классическое и статистическое определение вероятности.
129. Сложение вероятностей. Противоположные случайные события.
130. Умножение вероятностей независимых событий.
131. Вероятность появления хотя бы одного события.
132. Зависимые события. Условная вероятность. Полная вероятность.
133. Вероятность гипотез. Формула Байеса.
134. Последовательность независимых испытаний. Формула Бернулли. Локальная и интегральная теоремы Лапласа.
135. Дискретная случайная величина. Закон распределения дискретной случайной величины.
136. Математическое ожидание, дисперсия среднеквадратичное отклонение дискретной случайной величины.
137. Непрерывная случайная величина. Плотность распределения непрерывной случайной величины. Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал.
138. Функция распределения случайной величины.
139. Математическое ожидание, дисперсия, среднеквадратичное отклонение непрерывной случайной величины.
140. Двумерная случайная величина. Нормальный закон распределения на плоскости.
141. Вероятность попадания двумерной случайной величины в эллипс рассеивания.
142. Системы случайных величин. Линии регрессии. Корреляция.

143. Статистическое распределение выборки. Точечные и интервальные оценки параметров распределения.

5. Методические материалы, определяющие процедуры оценивания знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций

По дисциплине предусмотрены следующие формы контроля качества подготовки:

– текущий (осуществление контроля за всеми видами аудиторной и внеаудиторной деятельности обучающегося с целью получения первичной информации о ходе усвоения отдельных элементов содержания дисциплины);

– промежуточный (оценивается уровень и качество подготовки по конкретным разделам дисциплины).

– контроль самостоятельной работы студента.

Результаты текущего и промежуточного контроля качества выполнения студентом запланированных видов деятельности по усвоению учебной дисциплины являются показателем качества работы обучающего за время изучения дисциплины.

Итоговый контроль проводится в форме промежуточной аттестации – экзамена.

Текущий контроль успеваемости предусматривает оценивание хода освоения дисциплины, промежуточная аттестация обучающихся – оценивание результатов обучения по дисциплине, в том числе посредством испытания в форме экзамена.

Оценивание знаний, умений и навыков по учебной дисциплине «Математика» осуществляется посредством использования следующих видов оценочных средств:

– устные опросы;

– индивидуальные устные опросы по разделам (модулям) дисциплины (промежуточный контроль знаний);

– решение заданий в тестовой форме;

– выполнение и защита контрольной работы;

– экзамен.

Опросы

Устные опросы проводятся во время лабораторных занятий и при проведении промежуточного контроля знаний по разделам (модулям) дисциплины.

Вопросы опроса, проводимого во время лабораторных занятий, не должны выходить за рамки объявленной для данного занятия темы. Устные опросы необходимо строить так, чтобы вовлечь в тему обсуждения максимальное количество обучающихся в группе, проводить параллели с уже пройденным учебным материалом данной дисциплины и смежными курсами, находить удачные примеры из современной действительности, что увеличивает эффективность усвоения материала на ассоциациях. Основные вопросы для устного опроса доводятся до сведения студентов на предыдущем лабораторном занятии.

Индивидуальные устные блиц-опросы (по форме «вопрос-ответ») по разделам (модулям) дисциплины проводятся с целью определения степени усвоения теоретического материала и понятийного аппарата по всему разделу (модулю) дисциплины. Примерный перечень вопросов для индивидуального устного блиц-опроса представлены в рабочей программе дисциплины и доводятся до сведения студентов до начала курса.

При оценке опросов анализу подлежит точность формулировок, связность изложения материала, обоснованность суждений, опора на методические материалы.

Решение заданий в тестовой форме

Проводится периодически в течение изучения дисциплины. Каждому студенту отводится на тестирование по 1 минуте на каждое задание. Оценка результатов тестирования производится преподавателем, результат выдается немедленно по окончании теста, преподаватель комментирует правильные ответы. До окончания теста студент может еще раз просмотреть все свои ответы на задания и при необходимости внести коррективы. При прохож-

дении тестирования пользоваться конспектами лекций, учебниками, и иными материалами не разрешено.

Выполнение и защита контрольной работы (внеаудиторной)

Цель контрольной работы – обобщить знания, полученные студентами при изучении основного курса по дисциплине, представить самостоятельное исследование конкретной проблемы. Контрольная работа выполняется по индивидуальному варианту. Алгоритм выбора варианта контрольной работы представлен в методических указаниях по изучению дисциплины и выбору контрольной работы.

В процессе выполнения контрольной работы обучающийся, в том числе, демонстрирует навык самостоятельного подбора, отбора источников информации.

Экзамен

Промежуточная аттестация по дисциплине завершает изучение курса и проходит в виде экзамена. Экзамен проводится согласно расписанию зачетно-экзаменационной сессии. До экзамена не допускаются студенты, не сдавшие и не защитившие контрольную работу, а также хотя бы одну из текущих аттестаций по разделу (модулю) дисциплины. Как правило, экзамен выставляется студенту автоматически по результатам текущего и промежуточного контроля знаний и достижений, продемонстрированных студентом на занятиях, при условии успешного выполнения контрольной работы и освоения всего теоретического курса по предмету. Фамилии студентов, получивших экзамен автоматом, объявляются до начала промежуточной аттестации.

До начала экзамена все студенты группы размещаются в аудитории по одному человеку за столом. Экзамен принимает, как правило, лектор (ведущий преподаватель по предмету). В случае отсутствия ведущего преподавателя текущая аттестация проводится преподавателем, назначенным распоряжением декана факультета или заведующего кафедрой.

Проведение экзамена состоит из двух этапов:

1. Ответ на теоретические вопросы билета.
2. Ответ на дополнительные вопросы преподавателя по курсу дисциплины.

По итогам всех этапов и результатам текущей успеваемости выставляется итоговая отметка.

Преподаватель вправе повысить получившееся значение, основываясь на результатах текущей успеваемости студента и его работы на практических занятиях. Таким образом, оценка знаний студента на экзамене носит комплексный характер и определяется его:

- ответом на экзамене;
- оценкой самостоятельной работы;
- оценками, полученными обучающимися по итогам практических занятий, решением тестовых заданий, опросов и т.д.

Основой для определения оценки служит уровень усвоения обучающимся материала, предусмотренного рабочей программой. Результаты прохождения экзамена объявляются всей группе.

В случае неудовлетворительного результата экзамена назначается день и время повторной аттестации (по графику ликвидации задолженностей).

Присутствие посторонних лиц в ходе проведения аттестации без разрешения ректора или проректора не допускается (за исключением работников университета, выполняющих контролирующие функции в соответствии со своими должностными обязанностями). Для инвалидов и лиц с ограниченными возможностями здоровья допускается присутствие на аттестации ассистентов-сопровождающих.

Камчатский государственный технический университет

Кафедра физики и высшей математики

Н.Л. Недвигина

КУРС ЛЕКЦИЙ

По дисциплине «Математика»

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.

для студентов всех направлений подготовки
и специальностей
всех форм обучения

Петропавловск-Камчатский
2024

Рецензент:
Жуков С.А.
Доцент кафедры ЭуиЭС
ФГБОУ ВО «КамчатГТУ»

Недвигина Н.Л.

Линейная алгебра. Векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Курс лекций для студентов по дисциплине «Математика». – Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2024. – 85 с.

Курс лекций предназначен для приобретения теоритических знаний, в организации самостоятельной работы студентов, для конспектирования изучаемого материала, повторения и использования при решении задач, с освоением тренировочных заданий и теста, по программе учебной дисциплины «Математика», составлены в соответствии с требованиями к освоению основных образовательных программ направлений подготовки и специальностей ФГОС ВО.

Курс лекций по дисциплине «Математика». рассмотрены и утверждены на заседании УМС (протокол № 6 от 03.04.2024г.)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА……..... 6

1.1. Матрицы. Действия с матрицами…….... 6
1.2. Виды квадратных матриц……. 6
1.3. Операция транспонирования……..... 7
1.4. Линейные операции над матрицами……..... 7
1.5. Элементарные преобразования матриц……..... 8
1.6. Умножение матриц……..... 9
1.7. Определители……..... 10
1.8. Основные свойства определителей……..... 11
1.9. Обратная матрица……..... 13
1.10. Ранг матрицы……..... 15
1.11. Линейная независимость рядов матрицы…..... 16
1.12. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений..... 19
1.13. Матричный метод..... 20
1.14. Формулы Крамера..... 21
1.15. Метод Гаусса..... 23
1.16. Системы линейных однородных уравнений..... 25
1.17. Неоднородные системы линейных уравнений..... 28

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА..... 29

2.1. Основные понятия..... 29
2.2. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис..... 30
2.3. Проекция вектора на ось..... 32
2.4. Разложение вектора по ортам координатных осей..... 33
2.5. Скалярное произведение векторов и его свойства..... 34
2.6. Векторное произведение векторов и его свойства..... 35
2.7. Смешанное произведение векторов

и его свойства..... 37
2.8. n-мерный вектор. Линейные операции над n-мерными векторами..... 38
2.9. Скалярное произведение. Длина..... 39
2.10. n-мерное векторное пространство. Базис..... 40
2.11. Линейная независимость векторов..... 41
2.12. Базис линейного векторного пространства и координаты вектора..... 41
2.13. Переход к новому базису..... 43
2.14. Евклидово пространство..... 44
2.15. Ортонормированный базис..... 45
2.16. Линейные операторы..... 46
2.17. Матрица линейного оператора..... 46
2.18. Действия с линейными операторами..... 47
2.19. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах..... 48
2.20. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора..... 49

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ..... 51

3.1. Системы координат на плоскости..... 51
3.2. Преобразования системы координат..... 52
3.3. Деление отрезка в данном отношении..... 54
3.4. Линии на плоскости..... 54
3.5. Уравнение прямой на плоскости..... 55
3.6. Прямая на плоскости. Основные задачи..... 56
3.7. Линии второго порядка..... 57
3.8. Плоскость в трехмерном пространстве..... 61
3.9. Плоскость. Основные задачи..... 63
3.10. Уравнение прямой в пространстве..... 64
3.11. Прямая в пространстве. Основные задачи..... 65
3.12. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи..... 66
3.13. Поверхности второго порядка..... 68

3.14. Канонические уравнения поверхностей второго порядка..... 69
Тренировочные задания..... 74
Тренировочный тест..... 80
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ..... 85

ГЛАВА 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА.

1.1. Матрицы. Действия с матрицами

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Матрицу A называют матрицей *размерности m x n* и пишут A_{mxn}. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами.* Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной матрицей n-го порядка.* Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру *строки* (*i=j*), *называются диагональными и образуют главную диагональ* матрицы. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *столбцевой(строчной)* Имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}$$

1.2. Виды квадратных матриц

Верхняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Нижняя треугольная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Диагональная

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Единичная

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

1.3. Операция транспонирования

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строчки столбцом с тем же номером, называется матрицей *транспонированной* к данной. Обозначается A^T.

Транспонированная матрица обладает следующими свойствами:

1. $(A^T)^T = A$

2. $(A + B)^T = A^T + B^T$

3. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$

1.4. Линейные операции над матрицами

Суммой двух матриц $A_{m\times n} = (a_{ij})$ и $B_{m\times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n} = (c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n)$$

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что

$$b_{ij} = k \cdot a_{ij} \quad (i = 1, \dots, m, \; j = 1, \dots, n)$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A.

Разность матриц $A - B$ можно определить как

$$A - B = A + (-B)$$

Пример. Вычислим линейную комбинацию матриц $2A + B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$2A + B = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + 0 = A$;
4. $A - A = 0$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B$;
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot A$
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$

где A, B, C - матрицы, α, β - числа.

1.5.Элементарные преобразования матриц

Замечание: если свойство справедливо и для строк и для столбцов, то будем в формулировках называть их рядами.

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются *эквивалентными,* если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

1.6. Умножение матриц

Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \cdots + a_{in} \cdot b_{nk},$$

где $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p$

Пример. Найдем произведение матриц

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение: для заданных матриц определено только произведение $A \cdot B$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot 1 \\ (-1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 & -1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1) = \\ 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 4 & 3 \cdot 3 + (-5) \cdot 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -6 & -5 \\ -26 & 4 \end{pmatrix}$$

Если матрицы A и B квадратные одной размерности, то произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ всегда существуют. Легко показать, что $A \cdot E = E \cdot A = A$, где A - квадратная матрица, E - единичная матрица той же размерности.

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $A \cdot B = B \cdot A$.

Пример. Матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ перестановочны:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 12 & 18 \end{pmatrix}$$

Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A(BC) = (AB)C$;

2. $A(B + C) = AB + AC$;

3. $(A + B)C = AC + BC$;

4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$

Целой положительной степенью $A^m\ (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е. $A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$

Пример. Вычислим куб матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 8 & 8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & 32 \\ 8 & 8 \end{pmatrix}$$

Справедливы следующие свойства:

1. $A^0 = E$;

2. $A^1 = A$;

3. $A^m A^k = A^{m+k}$;

4. $(A^m)^k = A^{mk}$, $m, k \in N$.

Из равенства $A^m = 0$ не следует, что $A = 0$.

1.7. Определители

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее *определителем,* следующим образом:

1) $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.

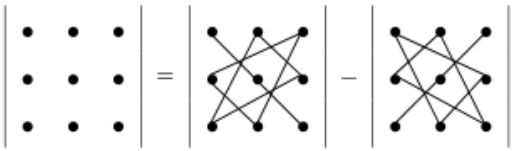
2) $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

3) $n = 3$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$
$a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}$

Это правило треугольника, или правило Сарруса.

Схема вычисления определителя второго порядка:

Схема вычисления определителя третьего порядка:



Пример. Вычислим определители матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 5 \cdot 6 = -28 \quad .$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 0 + 5 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \cdot 0 - 5 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = -15 \quad .$$

Определитель квадратной матрицы n - го порядка вычисляется с использованием свойств определителей.

1.8. Основные свойства определителей

1. «Равноправность строк и столбцов». Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами и наоборот ($\det A = \det A^T$).

2. При перестановке двух соседних рядов определитель меняет знак.

3. Если в определителе строка или столбец состоит из нулей, то определитель равен нулю.

4. Определитель, имеющий два равных ряда, равен нулю.

5. Общий множитель элементов какого-либо ряда можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что если все элементы какого-либо ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

6. «Элементарные преобразования определителя». Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

7. Определитель диагональной и треугольной матриц равен произведению диагональных элементов.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя *n*-го порядка называется определитель (*n*-1)-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания *i*-ой строки и *j*-го столбца. Обозначается M_{ij}.

Так, если $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$, то $M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Обозначается A_{ij} .

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Так, $A_{11} = +M_{11}$ $\qquad$ $A_{32} = -M_{32}$

Теорема I.1 (Теорема Лапласа) определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \cdot A_{kj}$$

Доказательство:

Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. В этом случае формула запишется так $\Delta = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}$. Подставим алгебраические дополнения и получим

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}) - a_{12} \cdot (a_{21} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{31}) + a_{13} \cdot (a_{21} \cdot a_{32} - a_{22} \cdot a_{31}) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} = \Delta.$$

1.9. Обратная матрица

Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю: $\Delta = \det A \neq 0$. В противном случае матрица называется вырожденной.

Матрицей, *союзной к матрице A*, называется матрица

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A.

Матрица A^{-1} называется *обратной матрице* A, если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Теорема I.2. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Доказательство:

Проведем доказательство для случая матрицы 2-го порядка.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A \neq 0$.

Составим союзную матрицу

$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$ и найдем произведение матриц A и A^*:

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} & a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} \\ a_{21}A_{11} + a_{22}A_{12} & a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} =$$

$$\det A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \det A \cdot E$$

т.е. $A \cdot A^* = \det A \cdot E \Rightarrow A \frac{A^*}{\det A} = E$.

Аналогично убедимся, что $A^* \cdot A = \det A \cdot E \Rightarrow \frac{A^*}{\det A} \cdot A = E$.

Сравнивая полученные равенства с определением, получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

Доказательство теоремы дает алгоритм вычисления обратной матрицы:

- Находим определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица вырожденная и A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица невырожденная и A^{-1} существует.
- Находим матрицу, состоящую из алгебраических дополнений.
- Транспонируем ее и получаем союзную матрицу.
- Каждый элемент этой матрицы делим на определитель.

Пример. Найдем матрицу, обратную к $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Решение: находим определитель матрицы

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$$

Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

Применяя формулу нахождения обратной матрицы

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2 & -0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}2 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Отметим свойства обратной матрицы:

1. $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$

2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

3. $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

1.10. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размерности $m \times n$. Выделим в ней k строк и k столбцов ($k \le \min(m; n)$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель *k*-го порядка. Все такие определители называются *минорами этой матрицы.*

Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом матрицы.* Обозначается r, $r(A)$, $\operatorname{rang} A$

Из определения следует:

- ранг матрицы не превосходит меньшего из ее

размеров, т.е. $r \le \min(m; n)$;

- $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A = 0$;
- для квадратной матрицы n-го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A — невырожденная.

Минор, порядок которого определяет ранг матрицы, называется *базисным*. У матрицы может быть несколько базисных миноров.

Отметим *свойства ранга* матрицы:

1. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Пример. Определим ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Решение: с помощью элементарных преобразований приведем матрицу к диагональному виду, умножая первую строку на -1 и прибавляя ко 2 и 3 строке, с элементами, стоящих на тех же местах, затем меняя получившуюся вторую и третью строку местами и действуем тем же способом, впоследствии получается строчка кратная -5, значит её можно будет поделить на -5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & -9 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Три первых столбца образуют базисный минор $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$. Это определитель 3-го порядка, поэтому $r(A) = 3$

1.11. Линейная независимость рядов матрицы

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием

линейной независимости ее строк или столбцов.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$

В матрице A обозначим ее строки:

$$e_1 = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$$
$$e_2 = (a_{21} \quad a_{22} \quad \dots \quad a_{2n})$$
$$\dots\dots\dots$$
$$e_m = (a_{m1} \quad a_{m2} \quad \dots \quad a_{mn})$$

Строка e называется *линейной комбинацией* строк $e_1, e_2, \dots, e_m$, если $e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – целые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк равна нулевой строке $\mathbf{0} = (0,0, \dots ,0)$.

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = \mathbf{0}$$

Теорема I.3 Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Доказательство:

Пусть для определенности $\lambda_m \neq 0$, тогда

$$e_m = (-\frac{\lambda_1}{\lambda_m})\, e_1 + (-\frac{\lambda_2}{\lambda_m})\, e_2 + \dots + (-\frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m})\, e_{m-1}$$

Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты равны нулю, т.е $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются *линейно независимыми*.

Теорема I.4 (о ранге матрицы) Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк, через которые линейно выражаются все остальные ее строки.

Доказательство:

:

Пусть матрица A размерности $\mathrm{m} \times \mathrm{n}$ имеет ранг r. Это означает, что существует отличный от нуля минор r-го порядка. Пусть для определенности это

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

Докажем, что строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы. Предположим противное, что $e_r = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \ldots + \lambda_{r-1} e_{r-1}$. Вычтем из нее первую строку, умноженную на λ_1, вторую на λ_2 и т.д. На основании свойств определителя при этом определитель не изменится. С другой стороны определитель, содержащий нулевую строку равен нулю. Предположение неверно. Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ линейно независимы.

Покажем, что любые $(r+1)$ строк линейно зависимы, т.е. любая строка выражается через $e_1, e_2, \ldots, e_r$. Рассмотрим минор $(r+1)$-го порядка, добавив i-ю строку и j-й столбец:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} & a_{2j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

Этот минор равен нулю, т.к. ранг равен r. Разложим его по последнему столбцу $a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{rj} A_{rj} + a_{ij} A_{ij} = 0$. Алгебраическое дополнение $A_{ij} \neq 0$, т.к. совпадает с базисным минором. Разделив на него равенство, выразим a_{ij} через остальные

$$a_{ij} = a_{1j} \left(-\frac{A_{1j}}{A_{ij}}\right) + a_{2j} \left(-\frac{A_{2j}}{A_{ij}}\right) + \ldots + a_{rj} \left(-\frac{A_{rj}}{A_{ij}}\right).$$

Получили, что каждый элемент i-ой строки выражается через элементы строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$, т.е. i-ая строка есть линейная комбинация строк $e_1, e_2, \ldots, e_r$.

Строки $e_1, e_2, \ldots, e_r$ будем называть *базисными.*

Пример. Найдем максимальное число линейно

независимых строк матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение: определим ранг матрицы, используя элементарные преобразования.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$r(A) = 2$. Матрица содержит две линейно независимые строки.

1.12. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Система m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными записывается в виде

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

где через a_{ij} обозначен коэффициент при неизвестном x_j в i *-м* уравнении системы; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные; числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ называются *свободными членами.*

Таблица коэффициентов при неизвестных называется *матрицей системы*:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

столбец $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ - столбцом неизвестных

столбец $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$ - *столбцом свободных членов.*

Если $m = n$, то определитель матрицы A чаще всего обозначается Δ и называется *определителем системы.*

Решение системы - множество чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ таких, что при подстановке их в уравнения системы каждое уравнение обращается в тождество.

Система уравнений называется *совместной,* если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной,* если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется *определенной,* если она имеет единственное решение, и *неопределенной,* если она имеет более одного решения. В последнем случае каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением.*

Решить систему - это значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Две системы называются *эквивалентными (равносильными),* если они имеют одно и то же общее решение.

Эквивалентные системы получаются, в частности, при элементарных преобразованиях строк матрицы.

Система линейных уравнений называется *однородной,* если все свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна, т.к. $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы.

1.13. Матричный метод

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

или в матричном виде система выглядит так $A \cdot X = B$.

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется *невырожденной.*

Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$. Поскольку $A^{-1} \cdot A = E$ и $E \cdot X = X$, то для нахождения неизвестных, а именно столбца неизвестных, формула будет выглядеть так:

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x + y + 4z = 1 \\ 2x + y + 6z = 2 \\ 3x + 3y + 13z = 2 \end{cases}$$

Решение: обозначим

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Т.к. $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 3 & 13 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, то значит обратная матрица существует $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 8 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1.14. Формулы Крамера

Матричное решение запишем в виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} =$$

$$\frac{A_{11}b_1+A_{21}b_2+\ldots+A_{n1}b_n}{\Delta}$$
$$\frac{A_{12}b_1+A_{22}b_2+\ldots+A_{n2}b_n}{\Delta}$$
$$\ldots$$
$$\left(\frac{A_{1n}b_1+A_{2n}b_2+\ldots+A_{nn}b_n}{\Delta}\right)$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n}{\Delta}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n}{\Delta}$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$ по элементам первого столбца.

Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Аналогично получаем формулы для остальных неизвестных. Формулы

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}$, $i = 1, \ldots, n$ называются формулами Крамера

Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x & -3y & +z & = 0 \\ x & +2y & -z & = 3 \\ 3x & +5y & & = 3 \end{cases}.$$

Решение: определитель системы

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \neq 0$$

Вычислим определители для неизвестных

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 18 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 3 \end{vmatrix} = -36 .$$

Теперь, по формулам Крамера находим неизвестные:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{18}{18} = 1 , \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{0}{18} = 0 , \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{-36}{18} = -2$$

1.15. Метод Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решения линейных алгебраических систем является метод Гаусса, состоящий в последовательном исключении переменных.

Пусть дана произвольная система *m* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов. На первом этапе *(прямой ход)* система приводится к *ступенчатому* (в частности, *треугольному)* виду.

Будем считать, что элемент $a_{11} \neq 0$ (если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля).

Преобразуем систему, исключив неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого. Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\frac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим почленно с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^{(1)}_{m2}x_2 + \ldots + a^{(1)}_{mk}x_k + \ldots + a^{(1)}_{mn}x_n = b^{(1)}_m \end{cases}$$

Аналогичным образом, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \neq 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее. Продолжаем этот процесс, пока это возможно. После каждого шага число уравнений может уменьшиться, если какое-либо уравнение является линейной комбинацией других уравнений. После последнего шага мы можем придти к одной из следующих ситуаций:

I. Число неизвестных совпадает с числом уравнений, и матрица системы приведена к треугольному виду ($a_{mn} \neq 0$)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^* x_2 + \ldots + a_{2k}^* x_k + \ldots + a_{2n}^* x_n = b_2^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nn}^* x_n = b_n^* \end{cases}$$

Теперь можно из последнего уравнения выразить $x_n = \frac{b_n^*}{a_{nn}^*}$, подставить найденное x_n в предыдущее уравнение, найти x_{n-1} и далее *обратным ходом* к первому уравнению. В этом случае $r(A) = r(A|B) = n$, а система имеет единственное решение.

II. Число неизвестных меньше числа уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^* x_2 + \ldots + a_{2k}^* x_k + \ldots + a_{2n}^* x_n = b_2^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nk}^* x_k + \ldots + a_{nn}^* x_n = b_n^*,\ b_{n+1}^*, b_{n+2}^*, \ldots, b_r^* \neq 0 \\ 0 \cdot x_k + \ldots + 0 \cdot x_n = b_{n+1}^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_k + \ldots + 0 \cdot x_n = b_r^* \end{cases}$$

В этом случае $r(A) < r(A|B)$, тогда некоторые уравнения системы противоречат остальным, т. е. система несовместна.

III. Число уравнений меньше числа неизвестных

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{22}^* x_2 + \ldots + a_{2k}^* x_k + \ldots + a_{2n}^* x_n = b_2^* \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{kk}^* x_k + \ldots + a_{kn}^* x_n = b_k^* \end{cases}$$

Выберем неизвестные соответствующие базисному минору $x_1, \ldots, x_r$ и будем считать их главными, а остальные

неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ примем за параметры, т.е. будем считать, что они принимают любые значения. Тогда

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^*_{rr}x_r = b^*_r - a^*_{rr+1}x_{r+1} - \ldots - a^*_{rn}x_n \end{cases}$$

Система имеет бесконечное множество решений. В этом случае $r(A) = r(A|B) < n$.

Обобщим полученные результаты в теореме Кронекера-Капелли.

Теорема II.1 Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

1.16. Системы линейных однородных уравнений

Система уравнений называется *однородной*, если все ее свободные члены $b_1, b_2, \ldots, b_m$ равны нулю.

Пусть дана система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Свойства однородной системы:

1. Однородная система всегда совместна т.к., она имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

2. Если X и Y два решения однородной системы, то линейная комбинация этих решений $\lambda X + \mu Y$ также является решением системы.

3. Если система имеет хотя бы одно не нулевое решение, то она имеет бесконечно много решений.

Теорема II.2 Для того, чтобы система однородных уравнений имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа неизвестных, т.е. $r < n$.

Необходимость

Очевидно $r \le n$. Пусть $r = n$. Тогда один из миноров размера n x n отличен от нуля. Поэтому система имеет единственное решение:

$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta} = 0$, $\Delta_i = 0$, $\Delta \neq 0$. Значит, других, кроме тривиальных, решений нет. Итак, если есть нетривиальное решение, то $r < n$.

Достаточность

Пусть $r < n$. Тогда однородная система, будучи совместной, является неопределенной. Значит, она имеет бесчисленное множество решений, т.е. имеет и ненулевые решения.

Совокупность решений $X_1, X_2, \dots, X_k$ однородной системы называется *фундаментальной системой решений,* если

1. $X_1, X_2, \dots, X_k$ линейно независимы

2. любое решение системы X представимо в виде линейной *комбинации* $X = a_1 X_1 + \dots + a_k X_k$

Пусть $r < n$, тогда $x_1, \dots, x_r$ - главные переменные, а $x_{r+1}, \dots, x_n$ - свободные переменные. Будем последовательно полагать одно из значений свободной переменной равным 1, а остальных - равным 0. При этом значения главных переменных можно рассчитать.

$$X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,\dots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad X_2 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\dots,0) \\ \vdots \\ x_r(1,0,\dots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$X_{n-r} = \begin{matrix} x_1(0,0,\dots,1) \\ \vdots \\ x_r(0,0,\dots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}$$

Эти решения образуют *фундаментальную систему решений* однородной системы.

Общее решение однородной системы можно записать в виде

$$X = a_1 X_1 + \dots + a_{n-r} X_{n-r}$$

Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + 13x_3 + 9x_4 = 2 \end{cases}$$

Решение: преобразуем матрицу системы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -4 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 13 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 17 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 5 \end{pmatrix}$$

.

$r(A) = r(A|B) = 2 < n = 4$. Главные неизвестные выбираем по базисному минору $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$: x_1, x_4, свободными неизвестными тогда будут x_2, x_3.

Положим $x_2 = 1, x_3 = 0$, тогда $x_1 = 2, x_4 = 0$.

Положим $x_2 = 0, x_3 = 1$, тогда $x_1 = 2,4;\ x_4 = 1,4$.

Фундаментальная система решений имеет вид

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad X_2 = \begin{pmatrix} 2,4 \\ 0 \\ 1 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

В результате получим решение системы

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2,4 \\ 0 \\ 1 \\ 1,4 \end{pmatrix}$$

1.17. Неоднородные системы линейных уравнений

Рассмотрим произвольную систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Соответствующей ей однородной системой будем называть систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

Свойства неоднородной системы:

1. Если Y решение неоднородной системы, а X решение соответствующей однородной системы, то $Z = Y + X$ решение неоднородной системы.

2. Если Y и Z решение неоднородной системы, то $X = Z - Y$ решение соответствующей однородной системы.

3. Любое решение Z неоднородной системы представимо в виде суммы $Z = Y + X$, где Y частное решение неоднородной системы, а X общее решение соответствующей однородной системы.

4. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ фундаментальная система решений однородной системы, а Y частное решение неоднородной системы, тогда множество решений неоднородной системы представимо в виде

$Z = Y + c_1X_1 + c_2X_2 + \ldots + c_{n-r}X_{n-r}$. Это выражение называется *общим решением системы.*

Пример. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 14 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 14 \end{cases}$$

Решение: преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 14 \\ 2 & -3 & 2 & -4 & 2 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 7 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & -4 & -3 & -3 & -68 \end{array}\right)$$

$r(A) = r(A|B) = 3 < n = 5$. Главные неизвестные выбираем по базисному минору x_1, x_2, x_3 свободным неизвестным придадим значения $x_4 = c_1$, $x_{5=} c_2$.

В результате получим решение системы

$$\begin{cases} x_1 = -0{,}25c_1 - 0{,}25c_2 + 11 \\ x_2 = -2c_1 + 14 \\ x_3 = -0{,}75c_1 - 0{,}75c_2 + 17 \\ x_4 = c_1 \\ x_5 = c_2 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ -2 \\ -0{,}75 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -0{,}25 \\ 0 \\ -0{,}75 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 11 \\ 14 \\ 17 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

2.1. Основные понятия

Вектор это отрезок, имеющий длину и направление.

Если А – начало вектора, а В – его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$. *Длиной* или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка и обозначается $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$. Вектор противоположный a обозначается $-a$.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным* вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает направление вектора a, называется *ортом* вектора a и обозначается $\vec{a^0}$. Очевидно, что $a = |a| \cdot \vec{a^0} (\vec{a^0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot a)$.

Линейные операции над векторами: *сумма*, *разность*, *умножение на число* были введены в школе.

2.2. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.

Линейной комбинацией векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется вектор a, определяемый по формуле $a = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$, где λ_i – некоторые числа (i=1,2…n).

Вектор $\vec{b}$ *разлагается (линейно выражается)* по векторам $a_1, a_2, \ldots, a_n$, если он равен некоторой линейной комбинации векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$: $\vec{b} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i$. Число λ_i называется *коэффициентами разложения* вектора $\vec{b}$ по системе $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Если для системы n векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ равенство $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \vec{0}$ верно только при $\lambda_i = 0 (i = 1, \ldots, n)$, то эта система называется *линейно независимой*.

Пример. Выясним линейную зависимость или независимость векторов a = (1;2;3), $\vec{b}$ = (2;-1;1), c = (1;3;4).

Решение: Линейную комбинацию $\lambda_1 a + \lambda_2 \vec{b} + \lambda_3 c$ приравниваем к нулю

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решением относительно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (если $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$, то векторы a, $\vec{b}$, c – линейно независимы). Запишем в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. $r(A)=2< n = 3$. Система имеет бесконечное множество решений, значит векторы линейно зависимы.

Если ни один из векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ нельзя представить в виде линейной комбинации остальных, то векторы $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называются *линейно независимыми*.

Замечание. Можно доказать, что эти два определения эквивалентны.

Совокупность любых трёх линейно независимых векторов e_1, e_2, e_3 в трёхмерном пространстве называется *базисом в пространстве*.

Если a произвольный вектор, то всегда можно найти единственным образом числа x_1, x_2, x_3 такие, что $a=x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Числа x_1, x_2, x_3 называются *координатами вектора a* в базисе e_1, e_2, e_3.

Пример. Разложим вектор x=(-2;3;1) по базису векторов e_1 =(1;2;-1), e_2=(-2;0;3), e_3=(-1;1;-1).

Решение: Запишем вектор x как линейную комбинацию векторов e_1, e_2, e_3:

$$x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Решим систему уравнений $\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + x_3 = 3 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$.

Преобразуем матрицу системы $\left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right)$, Система имеет единственное решение $x_1 = 1, x_2=1, x_3=1$. Вектор x_e=(1;1;1).

Из всех возможных базисов в пространстве выберем такой, чтобы все векторы, входящие в этот базис, были попарно ортогональны $(e_i, e_j) = \frac{\pi}{2}$, $(i,j = 1,2,3)$. Далее разделим каждый вектор базиса на его длину, получим базис e_1^0, e_2^0, e_3^0. Такой базис *называется ортонормированным*.

Поместим начало вектора в общую точку O и из этой точки проведём оси OX, OY, OZ, направленные по векторам e_1^0, e_2^0, e_3^0. Получим так называемую пространственную *прямоугольную декартовую систему координат* $OXYZ$. Причём орты принято обозначать $e_1^0 = i, e_2^0 = j, e_3^0 = \vec{k}$.

2.3. Проекция вектора на ось.

Пусть в пространстве задана ось l, т.е. направленная прямая. *Проекция точки* M на ось l называется основанием M_1 перпендикулярна MM_1, опущенного из точки на ось. Если точка M лежит на оси l, то проекция точки M на ось совпадает с M.

Пусть $\overrightarrow{AB}$ – произвольный вектор. Обозначим через A_1 и B_1 проекции на ось l точек A и B соответственно и рассмотрим вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется положительное число $|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l одинаково направлены и отрицательное число $-|\overrightarrow{A_1B_1}|$, если вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ и ось l противоположно направлены. Если точки A_1 и B_1 совпадают, то проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 0.

Проекция вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l обозначается $\text{пр}_l \overrightarrow{AB}$. Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$ или $\overrightarrow{AB} \perp l$, то $\text{пр}_l \overrightarrow{AB} = 0$.

Проекция вектора a на ось l равна произведению модуля вектора a на косинус угла φ между вектором и осью, т.е.

$$\text{пр}_l a = |a| \cdot \cos\varphi.$$

2.4. Разложение вектора по ортам координатных осей.

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $OXYZ$. Выберем произвольный вектор a пространства и совместим его с началом координат: $a = \overrightarrow{OM}$

Найдём проекции вектора a на координатные оси:

$$\text{пр}_x a = |\overrightarrow{OM_1}|,\ \text{пр}_y a = |\overrightarrow{OM_2}|,\ \text{пр}_z a = |\overrightarrow{OM_3}|.$$

По определению суммы векторов находим

$$a = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Но $\overrightarrow{OM_1} = |\overrightarrow{OM_1}| \cdot \vec{i},\quad \overrightarrow{OM_2} = |\overrightarrow{OM_2}| \cdot \vec{j},\quad \overrightarrow{OM_3} = |\overrightarrow{OM_3}| \cdot \vec{k}.$

Обозначив проекции вектора $a = \overrightarrow{OM}$ на оси OX, OY и OZ соответственно через a_x, a_y и a_z, получим

$$a = a_x \cdot i + a_y \cdot j + a_z \cdot \vec{k}$$

Т.о. любой вектор трёхмерного пространства можно разложить по векторам i, j, $\vec{k}$. При этом сами векторы имеют разложения $i(1,0,0)$, $j(0,1,0)$, $\vec{k}(0,0,1)$.

На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно написать:

$|\overrightarrow{OM}|^2 = |\overrightarrow{OM_1}|^2 + |\overrightarrow{OM_2}|^2 + |\overrightarrow{OM_3}|^2$, т.е. $|a|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$

или

$$|a| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Пусть углы вектора a с осями OX, OY и OZ соответственно равны α, β, γ. По свойству проекции вектора на ось, имеем $a_x = |a| \cos\alpha$, $a_y = |a| \cos\beta$, $a_z = |a| \cos\gamma$ или

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|},\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|},\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}$$

Числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* a.

Подставив выражения $a_x = |a| \cos\alpha$, $a_y = |a| \cos\beta$, $a_z = |a| \cos\gamma$ в равенство $|a|^2 = a_x{}^2 + a_y{}^2 + a_z{}^2$ и сократив его на $|a|^2 \neq 0$ получим соотношение

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Действия над векторами, заданными координатами и координаты вектора через координаты конца и начала известны из школьного курса.

2.5. Скалярное произведение векторов и его свойства.

Скалярным произведением двух ненулевых векторов a и $\vec{b}$ называется *число*, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначается $a\,\vec{b}$, $a\cdot\vec{b}$, $(a\,,\vec{b})$.

$$a\cdot\vec{b} = |a|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi,\ \varphi = \hat{(a\,,\vec{b})}$$

Свойства скалярного произведения

1. $a\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot a$
2. $(\lambda a)\cdot\vec{b}=\lambda(a\cdot\vec{b})$; $a\cdot(\vec{b}+c) = a\cdot\vec{b} + a\cdot c$;
3. $a^2 = |a|^2$ или $|a| = \sqrt{a^2}$;
4. $a \perp \vec{b} \Leftrightarrow a\cdot\vec{b} = 0$;
5. Выражение скалярного произведения через координаты. Найдём скалярное произведение векторов, перемножая их как многочлены

$$a\cdot\vec{b} = (a_x i + a_y j + a_z\vec{k})\cdot(b_x i + b_y j + b_z\vec{k}) =$$
$$= a_x b_x i\,i + a_x b_y i\,j + a_x b_z i\,\vec{k} + a_y b_x j\,i + a_y b_y j\,j + a_y b_z j\,\vec{k} +$$
$$a_z b_x\vec{k}\,i + a_z b_y\vec{k}\,j + a_z b_z\vec{k}\,\vec{k} =$$

Принимая во внимание, что

	i	j	$\vec{k}$
i	1	0	0
j	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$a_x b_x + 0 + 0 + 0 + a_y b_y + 0 + 0 + 0 + a_z b_z$. Окончательно получим:

$$a\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

6. Угол между векторами

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

7. Проекция вектора на заданное направление или вектор

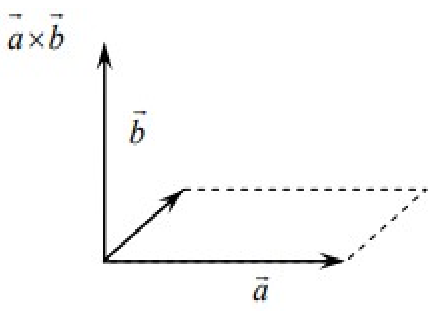
$$пр.(\vec{a}\ на\ \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}$$

2.6. Векторное произведение векторов и его свойства.

Три некомпланарных (не лежащих в одной плоскости) вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют *правую тройку*, если с конца вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от вектора $\vec{a}$ к вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и *левую*, если по часовой.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется *вектор* $\vec{a}\times\vec{b}$, который:

1. перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$
2. имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т.е. $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{a}\times\vec{b}$ образуют правую тройку
4. обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$, $[\vec{a},\vec{b}]$



Из определения вытекают следующие соотношения

$i \times j = \vec{k}$ $j \times \vec{k} = i$ $\vec{k} \times i = j$

Свойства векторного произведения

1. $a \times \vec{b} = -(\vec{b} \times a)$
2. $\lambda(a \times \vec{b}) = (\lambda a) \times \vec{b} = a \times (\lambda \vec{b})$
3. $(a + \vec{b}) \times c = a \times c + \vec{b} \times c$
4. $a \parallel \vec{b} \Leftrightarrow a \times \vec{b} = 0$
5. Выражение векторного произведения через координаты

   Найдём векторное произведение векторов

$$a \times \vec{b} = (a_x i + a_y j + a_z \vec{k}) \times (b_x i + b_y j + b_z \vec{k}) =$$
$$= a_x b_x (i \times i) + a_x b_y (i \times j) + a_x b_z (i \times \vec{k}) +$$
$$a_y b_x (j \times i) + a_y b_y (j \times j) + a_y b_z (j \times \vec{k}) +$$
$$a_z b_x (\vec{k} \times i) + a_z b_y (\vec{k} \times j) + a_z b_z (\vec{k} \times \vec{k}) =$$

Принимая во внимание, что

	i	j	$\vec{k}$
i	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-j$
j	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	i
$\vec{k}$	j	$-i$	$\vec{0}$

$$= \vec{0} + a_z b_y \vec{k} - a_x b_z j - a_y b_x \vec{k} + \vec{0} + a_y b_z i + a_z b_x j - a_z b_y i +$$
$$\vec{0} = (a_y b_z - a_z b_y) i - (a_x b_z - a_z b_x) j + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} =$$
$$\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$a \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \vec{k} \text{ или}$$

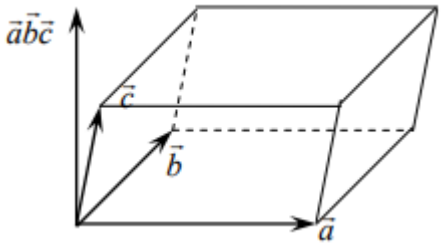
$$a \times \vec{b} = \begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

6. $S_{\text{пар}} = |a \times \vec{b}|$ и $S_{\triangle} = \frac{1}{2} |a \times \vec{b}|$

2.7. Смешанное произведение векторов и его свойства.

Рассмотрим произведение векторов a, $\vec{b}$ и c, составленное следующим образом: $(a \times \vec{b}) \cdot c$. Такое произведение называется *векторно-скалярным* или *смешанным*. Обозначается: $a\,\vec{b}c = (a \times \vec{b}) \cdot c$.

Выясним геометрический смысл выражения $(a \times \vec{b}) \cdot c$. Построим параллелепипед, рёбрами которого являются векторы a, $\vec{b}$, c и вектор $d = a \times \vec{b}$



Имеем: $(a \times \vec{b}) \cdot c = d \cdot c = |d| \cdot \text{пр}_d c$, $|d| = |a \times \vec{b}| = S$, где S – площадь параллелограмма, построенного на векторах a и $\vec{b}$, $\text{пр}_d c = H$ для правой тройки векторов и $\text{пр}_d c = -H$ для левой, где H – высота параллелепипеда. Получаем: $(a \times \vec{b}) \cdot c = S \cdot (\pm H) = \pm V$, где V – объём параллелепипеда, образованного векторами a, $\vec{b}$ и c. Таким образом смешанное произведение трёх векторов равно объёму параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

Свойства смешанного произведения

1. $(a \times \vec{b}) \cdot c = (\vec{b} \times c) \cdot a = (c \times a) \cdot \vec{b}$
2. $(a \times \vec{b}) \cdot c = a \cdot (\vec{b} \times c)$
3. $a\,\vec{b}c = -a\,\vec{b}c$, $a\,\vec{b}c = -\vec{b}\,a\,c$, $a\,\vec{b}c = -c\,\vec{b}a$

4. $(a \times \vec{b}) \cdot c = 0 \Leftrightarrow a, \vec{b}$ и c – компланарны
5. Выражение смешанного произведения через координаты

$$(a \times \vec{b}) \cdot c = ((a_x i + a_y j + a_z \vec{k}) \times (b_x i + b_y j + b_z \vec{k})) \cdot c =$$

$$\begin{vmatrix} i & j & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot (c_x i + c_y j + c_z \vec{k}) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} c_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} c_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} c_z$$

Таким образом смешанное произведение вычисляется по формуле:

$$a\,\vec{b}c = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

6. Взаимная ориентация векторов в пространстве: если $a\,\vec{b}c > 0$, то $a, \vec{b}$ и c – правая тройка, если $a\,\vec{b}c < 0$, то $a, \vec{b}$ и c – левая тройка;
7. $V_{\text{пар}} = |a\,\vec{b}c|$ и $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|a\,\vec{b}c|$

2.8. n-мерный вектор. Линейные операции над n-мерными векторами.

Последовательность n действительных чисел называется n -мерным вектором. Обозначается $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Числа $a_1, a_2, \dots, a_n$ называются *координатами* вектора, а n – *размерностью* вектора.

Два n -мерных вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называются *равными*, когда равны их соответствующие координаты: $a = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ \dots \\ a_n = b_n \end{cases}$

Суммой векторов $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется

вектор $a + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$.

Произведением вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ *на число* λ называется

вектор $\lambda a = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n)$.

Вектор $\vec{0}$ называется нулевым, если для любого вектора выполняется равенство $a + \vec{0} = a$.

Вектор $-a$ называется *противоположным* вектору a, если $a + (-a) = \vec{0}$

Так как операции над n -мерными векторами определяются через операции над их координатами, то многие свойства арифметических операций справедливы и для операций над векторами:

1. $a + \vec{b} = \vec{b} + a$
2. $(a + \vec{b}) + c = a + (\vec{b} + c)$
3. $\lambda_1(\lambda_2 a) = (\lambda_1 \lambda_2)a$
4. $(\lambda_1 + \lambda_2)a = \lambda_1 a + \lambda_2 a$
5. $\lambda(a + \vec{b}) = \lambda a + \lambda\vec{b}$
6. $1 \cdot a = a$

2.9. Скалярное произведение. Длина.

Скалярным произведением векторов $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется число:

$$a \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n)$$

Длиной (модулем) вектора $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ называется число $|a| = \sqrt{a^2}$.

Углом между векторами $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ называется число $\varphi \in [0; \pi]$, для которого

$$\cos\varphi = \frac{a \cdot \vec{b}}{|a| \cdot |\vec{b}|}$$

2.10. n-мерное векторное пространство. Базис.

Множество **L** элементов $x, y, \ldots, z$ называется линейным (векторным) пространством, если:

1. Для любых двух элементов $x \in \boldsymbol{L}$ и $y \in \boldsymbol{L}$ определена операция сложения
2. Для любого элемента $x \in \boldsymbol{L}$ и любого числа α определена операция умножения элемента x на число α
3. Определено равенство элементов из $\boldsymbol{L}$
4. Операции (*1*) и (*2*) удовлетворяют условиям:
   - ***a.*** $x + y = y + x$
   - ***b.*** $(x + y) + z = x + (y + z)$
   - ***c.*** $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$
   - ***d.*** $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$
   - ***e.*** $\alpha(x + y) = ax + ay$
   - ***f.*** существует элемент, называемый нулевым, такой, что $x + 0 = x$
   - ***g.*** для любого $x \in \boldsymbol{L}$ имеет место $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
   - ***h.*** для любого $x \in \boldsymbol{L}$ существует элемент $-x$, называемый противоположным, такой, что

$$x + (-x) = 0$$

Совокупность всех n -мерных векторов образует *линейное векторное пространство* $\mathbf{R^n}$.

Свойства линейного векторного пространства:

1. В каждом линейном векторном пространстве существует единственный элемент $\vec{0}$
2. В каждом линейном векторном пространстве любому элементу соответствует единственный противоположный элемент
3. Для всякого элемента a справедливо равенство

$$\vec{0} \cdot a = \vec{0}$$

4. Для любого числа α справедливо равенство $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

5. Для каждого элемента справедливо

$$-a = (-1) \cdot a$$

2.11. Линейная независимость векторов.

Определяется также как в случае трехмерных геометрических векторов: если для системы k векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ равенство $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i = \vec{0}$ верно только при $\lambda_i = 0 \, (i = 1, \ldots, k)$, то эта система называется *линейно независимой*. Следовательно, решение вопроса о линейной зависимости или независимости системы из k n -мерных векторов сводится к исследованию линейной однородной системы n уравнений с k неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \cdots + a_{1k}\lambda_k = 0 \\ a_{21}\lambda_1 + a_{22}\lambda_2 + \cdots + a_{2k}\lambda_k = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\lambda_1 + a_{n2}\lambda_2 + \cdots + a_{nk}\lambda_k = 0 \end{cases}$$

Можно показать, что если векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$ линейно зависимы, то хотя бы один из них можно представить в виде линейной комбинации остальных и наоборот.

2.12. Базис линейного векторного пространства и координаты вектора.

Любая совокупность n линейно независимых векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ называется *базисом* пространства $\boldsymbol{R^n}$, если каждый вектор из пространства $\boldsymbol{R^n}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этой совокупности, то есть $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n}$. Такое представление вектора называется *разложение его по данному базису*. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *координатами вектора* в этом базисе.

Теорема IV.1 Координаты вектора относительно некоторого базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ определяются единственным образом.

Доказательство:

Пусть имеется два разложения некоторого вектора x относительно базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\vec{x} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \ldots + x_n\vec{e_n}$$
$$\vec{x} = x'_1\vec{e_1} + x'_2\vec{e_2} + \ldots + x'_n\vec{e_n}$$

Вычитая из первого равенства второе, получим:

$$\vec{0} = (x_1 - x'_1)\vec{e_1} + (x_2 - x'_2)\vec{e_2} + \ldots + (x_n - x'_n)\vec{e_n}.$$

Так как векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независимы, то значит, что коэффициенты линейной комбинации могут быть только нулями, т.е. $x_1 = x'_1, x_2 = x'_2, \ldots, x_n = x'_n$. Одним из базисов пространства $\boldsymbol{R^n}$ является система

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\ldots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 1)$$

Действительно, система

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$$

имеет только тривиальное (нулевое) решение. Значит система векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейно независима. И любой вектор $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ разлагается по этой системе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ следующим образом $a = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n$. То есть координаты вектора это коэффициенты в разложении этого вектора по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Любой другой базис пространства $\boldsymbol{R^n}$ также состоит из n векторов.

Размерностью пространства $\boldsymbol{R^n}$ называется число векторов в любом его базисе. Это означает, что если размерность пространства равна n, то в нем можно указать n линейно независимых векторов, а любые $n + 1$ векторов этого пространства линейно зависимы.

2.13. Переход к новому базису.

Поскольку $\boldsymbol{R^n}$ может иметь не единственный базис встает вопрос, о переходе от разложения в одном базисе к разложению в другом базисе.

Пусть имеется два базиса: $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$, и пусть некоторый вектор раскладывается по базисам $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = \sum_{i=1}^{n} x_i' \varepsilon_i$. Очевидно, что векторы базиса $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ также можно разложить по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$:

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \tau_{11} e_1 + \tau_{21} e_2 + \cdots + \tau_{n1} e_n \\ \varepsilon_2 = \tau_{12} e_1 + \tau_{22} e_2 + \cdots + \tau_{n2} e_n \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \varepsilon_n = \tau_{1n} e_1 + \tau_{2n} e_2 + \cdots + \tau_{nn} e_n \end{cases}$$

Составим матрицу перехода T:

$$T = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1n} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \ldots & \tau_{nn} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \cdots \\ X_n \end{pmatrix} \quad X' = \begin{pmatrix} X_1' \\ X_2' \\ \cdots \\ X_n' \end{pmatrix}$$

тогда $X = T \cdot X'$ или обратное соотношение $X' = T^{-1} \cdot X$

Матрица T называется *матрицей преобразования координат* при переходе от базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$ к базису $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Пример. Координаты вектора $x = (6;6;1)$ даны в базисе e_1, e_2, e_3. Записать его координаты в базисе $\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + \frac{5}{6} e_3$, $\varepsilon_2 = -5e_1 - e_2$, $\varepsilon_3 = -e_1 + e_2 + e_3$.

Решение: Запишем матрицу перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{5}{6} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Строим обратную матрицу

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \frac{5}{6} & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Поэтому $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{25}{6} & -4 \end{pmatrix}$

Тогда

$$x' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 6 \\ \frac{1}{6} & -\frac{11}{6} & 2 \\ -\frac{5}{6} & \frac{25}{6} & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

2.14. Евклидово пространство.

Линейное пространство называется *евклидовым*, если в нем определена операция, ставящая в соответствие любым двум элементам $x \in \boldsymbol{L}$ и $y \in \boldsymbol{L}$ число, называемое скалярным произведением и обозначаемое (x, y) для которого выполняется:

1. $(x, y) = (y, x)$;

2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;

3. $(\alpha x, y) = \alpha (x, y)$;

4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) \Leftrightarrow 0$.

Обозначается $\boldsymbol{E^n}$

Линейное пространство называется *нормированным,* если каждому элементу $x \in \boldsymbol{L}$ поставлено в соответствие неотрицательное число, называемое его нормой $\|x\|$. При этом выполняются аксиомы:

1) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$
3) $\|(x, y)\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Если в качестве нормы любого вектора из $\mathbf{R^n}$ принять его длину $\|x\| = |x|$, то станет ясно, что $\mathbf{R^n}$ является евклидовым, нормированным пространством.

2.15. Ортонормированный базис.

Под операцией *нормирования* вектора понимают умножение ненулевого вектора на число $\frac{1}{|\vec{a}|}$, т.е. $a^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.

Векторы из $\boldsymbol{R^n}$ называются *ортогональными*, если для них выполняется равенство $a \cdot \vec{b} = 0$.

Базис векторного пространства называется *ортогональным*, если векторы этого базиса попарно ортогональны.

Если все векторы ортогонального базиса имеют единичную длину, то базис называется *ортонормированным*. Легко проверить, что базис

$$e_1 = (1,0, \dots ,0)$$
$$e_2 = (0,1, \dots ,0)$$
$$\dots$$
$$e_n = (0,0, \dots ,1)$$

является ортонормированным в $\boldsymbol{R^n}$. В трехмерном пространстве ортонормированным базисом является базис $i, j, \vec{k}$.

Теорема IV.2 Во всяком векторном пространстве существует ортонормированный базис.

Доказательство: для $n = 3$

Пусть $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ некоторый произвольный базис. Построим какой-нибудь ортонормированный базис e_1^0, e_2^0, e_3^0. Положим $e_1 = \varepsilon_1, e_2 = \varepsilon_2 + \alpha e_1$, α подберем так, чтобы $(e_1, e_2) = 0 \Longrightarrow \alpha = -\frac{(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)}{(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_1)}$.

Далее определим $e_3 = \varepsilon_3 + \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2$, так чтобы $\begin{cases} (e_1, e_3) = 0 \\ (e_2, e_3) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \beta_1 = -\frac{(e_1, \vec{\varepsilon}_3)}{(e_1, e_1)}; \beta_2 = -\frac{(e_2, \vec{\varepsilon}_3)}{(e_2, e_2)}$. Остаётся только пронормировать построенный базис:

$e_1^0 = \frac{e_1}{|e_1|}, e_2^0 = \frac{e_2}{|e_2|}, e_3^0 = \frac{e_3}{|e_3|}$.

Пример. Построим ортонормированный базис исходя из базиса $e_1(-2;0;1), e_2(1;-1;0), e_3(0;1;2)$.

Решение: $\varepsilon_1 = e_1 = (-2;0;1)$. Ищем $\varepsilon_2 = e_2 + \alpha\varepsilon_1$. Подберём α так, чтобы $(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = (e_1,e_2) + \alpha(e_1,e_1) = -2 + +5\alpha = 0$. Получим $\alpha = \frac{2}{5}$. Ищем $\varepsilon_3 = e_3 + \beta\varepsilon_1 + \gamma\varepsilon_2$. Подбираем β и γ так, чтобы

$$\begin{cases} (\varepsilon_1,\varepsilon_3) = (e_1,e_3) + \beta(e_1,e_1) = 2 + 5\beta = 0 \\ (\varepsilon_2,\varepsilon_3) = (\varepsilon_2,e_3) + \gamma(\varepsilon_1,\varepsilon_1) = -\frac{1}{5} + \frac{6}{5}\gamma = 0 \end{cases}$$

Отсюда $\beta = -\frac{2}{5}$, $\gamma = \frac{1}{6}$.

Получаем $\varepsilon_1 = (-2;0;1), \varepsilon_2 = (\frac{1}{5}, -1, \frac{2}{5}), \varepsilon_3 = (\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{5}{3})$.

Пронормируем $|\varepsilon_1| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\varepsilon_1^0 (\frac{-2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}})$

$|\varepsilon_2| = \sqrt{\frac{1}{25} + 1 + \frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{6}{5}}$ $\varepsilon_2^0 (\frac{1}{\sqrt{30}}, \frac{-5}{\sqrt{30}}, \frac{2}{\sqrt{30}})$

и $|\varepsilon_3| = \sqrt{\frac{25}{36} + \frac{25}{36} + \frac{25}{9}} = \frac{5}{\sqrt{6}}$ $\varepsilon_3^0 (\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}})$

2.16. Линейные операторы.

Если задан закон, который каждому вектору $x \in \boldsymbol{R^n}$ ставит в соответствие вектор $y \in \boldsymbol{R^n}$, то говорят, что в пространстве задан *оператор A*, при этом пишут: $y = Ax$. Оператор A называется *линейным*, если для любых $x_1 \in \boldsymbol{R^n}$ и $x_2 \in \boldsymbol{R^n}$ и произвольного числа α выполняется условия:

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$
2. $A(\alpha x) = \alpha Ax$

2.17. Матрица линейного оператора

Рассмотрим в пространстве $\boldsymbol{R^n}$ базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, и пусть в этом пространстве определён линейный оператор $A: y = Ax$. Разложим векторы x и y по этому базису:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n$$
$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \cdots + y_n e_n$$

В силу линейности оператора A можно написать:
$Ax = x_1 Ae_1 + x_2 Ae_2 + \cdots + x_n Ae_n$. Но каждые Ae_i можно разложить по базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$, то есть
$Ae_i = a_{1i} e_1 + a_{2i} e_2 + \cdots + a_{ni} e_n \ (i = 1,2, \ldots, n)$. Подставив разложения в $y = Ax$ и приравнивая коэффициенты при базисных векторах, получим:

$$y_1 = a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n$$
$$y_2 = a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n$$
$$\ldots \ldots \ldots$$
$$y_1 = a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \cdots + a_{nn} x_n$$

Таким образом линейному оператору A в данном базисе соответствует квадратная матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

которая называется *матрицей линейного оператора A*,
i-ый столбец который состоит из координат вектора Ae_i относительно данного базиса. Если ввести в рассмотрение одностолбцовые матрицы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

система запишется в матричном виде
$Y = AX$.

2.18. Действия с линейными операторами.

Суммой линейных операторов A и *B* называется оператор *C*, определяемый равенством $Cx = Ax + Bx$

Очевидно, что матрица линейного оператора суммы равен сумме матриц линейных операторов слагаемых
$C = A + B$.

Произведением линейного оператора A на число α называется оператором αA, определяемый равенством

$(\alpha A)x = \alpha(Ax)$. Матрица этого оператора равна $\alpha \cdot A$.

Пусть в $\boldsymbol{R^n}$ определены линейные операторы A и B таким образом, что $y = Bx$, $z = Ay$.

Произведением $A \cdot B$ линейных операторов A и B называется оператором C, определяемый соотношением $Cx = A(Bx)$.

Можно показать, что матрица $C = A \cdot B$.

Пример. Пусть $x = (x_1, x_2, x_3)$,
$Ax = (x_2 - x_3, x_1, x_1 + x_3)$, $Bx = (x_2, 2x_3, x_1)$.
Найдём $(AB)x \quad (B(A - B))x$.

Решение: Запишем матрицы линейных операторов

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Выполним действия с матрицами $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$(B(A-B)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Запишем соответствующие линейные операторы
$(AB)x = (-x_1, 2x_3, x_2, x_1 + x_2)$
$(B(A-B))x = (x_1 - 2x_3, 2x_3 - x_3)$.

2.19. Связь между матрицами линейного оператора в разных базисах.

Пусть задан линейный оператор $y = Ax$ или в матричном виде $Y = AX$ относительно данного базиса $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Выберем в том же пространстве другой базис $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$. Относительно этого базиса матрица линейного оператора будет другой. Обозначим через T матрицу преобразования координат, а X' и Y' разложение векторов новом базисе, то есть $X = TX'$, $Y = TY'$. Подставляя, получим $TY' = ATX'$, умноженная на T^{-1}, получим $Y' = T^{-1}ATX'$.

Итак, при переходе к новому базису матрица линейного оператора меняется и становится равной $T^{-1}AT$.

Пример. Матрица линейного оператора в базисе e_1, e_2, e_3 имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдём матрицу этого оператора в базисе

$$\varepsilon_1 = e_1 + e_2 + 2e_3 \qquad \varepsilon_2 = 2e_1 - e_2 \qquad \varepsilon_3 = -e_1 + e_2 + e_3$$

Решение: Запишем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

тогда $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$. Матрица в новом базисе имеет вид

$$A' = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -9 & 5 \\ 6 & 13 & -9 \\ 9 & 23 & -12 \end{pmatrix}$$

2.20. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора.

Нулевой вектор x называется *собственным вектором* линейного оператора A, если найдётся такое число λ, что будет выполнятся равенство $Ax = \lambda x$. При этом число λ называется *собственным значение (собственным числом)оператора* A, соответствующем вектору x. Множество всех собственных значений оператора A называется его *спектром*.

Для того, чтобы найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора A, рассмотрим матрицу линейного оператора A в некотором базисе $(n = 3)$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Тогда в силу определения

$AX = \lambda X \Rightarrow AX - \lambda EX = 0 \Rightarrow (A - \lambda E)X = 0$.

Итак, дело свелось к решению системы линейных

однородных уровней. Очевидно, что система имеет ненулевое решение, если $det\ (A - \lambda E) = 0$.

Уравнение $det\ (A - \lambda E) = 0$ называется *характеристическим уравнением* оператора *A,* В координатной форме характеристическое уравнение имеет вид: $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33-\lambda} \end{vmatrix} = 0$

Теорема IV.3 Характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса.

Доказательство:

Запишем характеристический многочлен в новом базисе $det\ (A' - \lambda E) = 0$. Если известна матрица перехода от старого базиса к новому *C*, получим

$det\ (A' - \lambda E) = det\ (C^{-1} A'C - \lambda C^{-1} EC) =$

$det\ (C^{-1}(A' - \lambda E)C) = det\ (C^{-1}) det\ (A - \lambda E) det\ (C) =$

$det\ (C^{-1}) det\ (C) det\ (A - \lambda E) = det\ (A - \lambda E).$

Решая характеристическое уравнение, найдём собственные значения оператора, а затем собственные векторы оператора. Матрица линейного оператора принимает наиболее простой вид, если в качестве базисных взять собственные векторы линейного оператора.

$Ae_i = a_{1i} e_2 + a_{2i} e_i + \cdots + a_{ni} e_n$, но $Ae_i = \lambda e_i$.

Поэтому $a_{ij} = 0$, $i \neq j$ и $a_{ii} = \lambda_i$, то есть матрица является диагональной и по диагонали стоят её собственные значения.

Теорема IV.4 Если линейный оператор имеет *n* различных собственных значений, то отвечающие им собственные векторы линейно не зависимы и матрица этого оператора записанная в базисе состоящем из собственных векторов имеет диагональный вид.

Пример. Найдём собственные значения и собственные

векторы оператора $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$

Решение: Запишем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 9\lambda^2 - 81\lambda + 729 = 0$ и решим его: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

Найдём собственные векторы для каждого собственного значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$,

матрица системы $\begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

тогда $X = c_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_3 = -9$,

матрица системы $\begin{pmatrix} 10 & -4 & -8 \\ -4 & 16 & -4 \\ -8 & -4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ и

$X = c \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ.

3.1. Системы координат на плоскости.

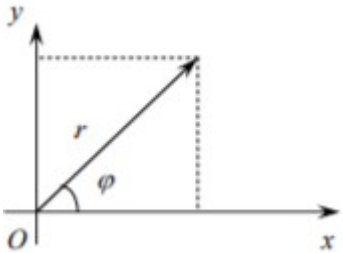
Прямоугольная (декартова) система координат задается двумя взаимно перпендикулярными прямыми, на каждой из которых выбрано положительное направление и задан единичный отрезок. Единичные векторы осей обозначают $i = (0, 1)$ *и* $j = (0, 1)$ при этом образуется система координат *OXУ*.

Рассмотрим произвольную точку *M* плоскости *OXУ*. Вектор $\bar{OM}$ называется *радиус–вектором* точки *M*.

Координатами точки *M* в системе координат *OXУ*

называются координаты радиус–вектора $\bar{}OM$. Если $\bar{}OM = (x, y)$, то координаты точки записывают так $M(x, y)$. Числа x и y полностью определяют положение точки на плоскости: каждой паре чисел x и y соответствует единственная точка M плоскости, и наоборот.

Полярная система координат задается точкой O, называемой полюсом, лучом OP, называемым *полярной осью*. Положение точки M определяется двумя числами: расстоянием r от полюса и углом φ, образованным отрезком OM с полярной осью (против часовой стрелки). Числа r и φ называются *полярными координатами* точки M, пишут $M(r, \varphi)$, при этом r — *полярный радиус*, φ — *полярный угол*.



Связь между прямоугольными и полярными координатами выражается следующим образом:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

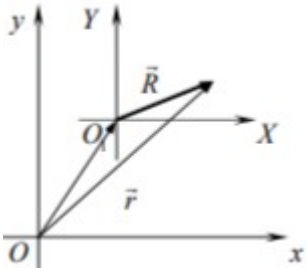
3.2. Преобразования системы координат.

Переход от одной системы координат в какую-либо другую называется *преобразованием системы координат*.

Под *параллельным переносом осей координат* понимают переход к новой системе O_1XY, при котором меняется положение начала координат, а направление и масштаб остаются неизменными.

Пусть оси O_1X и O_1Y параллельны осям OX и OY. Допустим точка $M(x,y)$, в системе координат O_1XY имеет

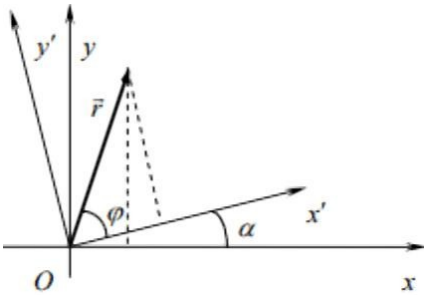
координаты x и y . Установим связь между ними.



Из чертежа видно, что $r = \overline{OO_1} + \overline{R}$.
Если $O_1(a,b)$ относительно системы $OXУ$, то

$$\begin{cases} x = a + X \\ y = b + Y \end{cases}$$

Под *поворотом осей координат* понимают такое преобразование координат, при котором обе оси поворачиваются на один угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.



Повернем исходную систему координат $OXУ$ на угол α, и пусть она займет положение OX_1Y_1. Получим соотношения

$$x = |\overline{r}|\cos(\varphi + a) = |\overline{r}|\cos\varphi\cos a - |\overline{r}|\sin\varphi\sin a =$$
$$= x_1\cos a - y_1\cos a$$
$$x = |\overline{r}|\cos(\varphi + a) = |\overline{r}|\sin\varphi\cos a + |\overline{r}|\cos\varphi\sin a =$$
$$= x_1\sin a + y_1\cos a$$

То есть $\begin{cases} x = x\prime\cos a - y\prime\sin a \\ y = x\prime\sin a + y\prime\cos a \end{cases}$

3.3. Деление отрезка в данном отношении.

Отрезок AB, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ разделим в заданном отношении $\lambda > 0$. $\overline{AM} = \lambda\overline{MB}$, но $\overline{AM} = (x - x_1,\ y - y_1)$, а $\overline{MB} = (x_2 - x, y_2 - y)$. Учитывая, что равные векторы имеют равные координаты, получим
$x - x_1 = \lambda x_2 - \lambda x$ и $y - y_1 = \lambda y_2 - \lambda$. То есть

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

3.4. Линии на плоскости.

Введение системы координат позволяет определить положение точки плоскости заданием двух чисел, а положение линии на плоскости определяет уравнение, т.е. равенство, связывающее координаты точек.

Уравнением линии на плоскости OXY называется такое уравнение $F(x, y) = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение линии позволяет изучение геометрических свойств линии заменить исследованием ее уравнения.

Уравнение $F(r, \varphi) = 0$ называется *уравнением линии в полярной системе координат*.

Линию на плоскости можно задать при помощи двух уравнений (*параметрическое уравнение*):

$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, где x и y — координаты произвольной точки, а t — переменная, называемая *параметром*.

Линию на плоскости можно задать *векторным уравнением*: $r = r(t)$. При изменении параметра конец вектора r опишет некоторую линию.

3.5. Уравнение прямой на плоскости.

Положение прямой на плоскости однозначно определяется ординатой точки $N(0, b)$, пересечения с осью $OУ$ и углом α между осью OX и прямой: $\text{tg}\,\alpha = \frac{y-b}{x}$. Обозначив $k = tg\,\alpha$, получим уравнение прямой с *угловым коэффициентом* $y = kx + b$.

Если прямая параллельна оси OX, то $\alpha = 0$ и $k = tg\,\alpha = 0$. Уравнение примет вид $y = b$.

Если прямая параллельна оси $OУ$, то $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $tg\alpha$ не существует. Уравнение примет вид $x = a$.

Рассмотрим уравнение первой степени относительно x и y в общем виде $Ax + By + C = 0$. Покажем, что это уравнение прямой на плоскости.

Если $B = 0$, уравнение имеет вид $Ax + C = 0$, т.е. $x = \frac{C}{A}$. Это прямая параллельная оси Оу.

Если $B \neq 0$, то получим $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ уравнение прямой с угловым коэффициентом $tg\alpha = -\frac{A}{B}$.

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называют *общим уравнением прямой*.

Некоторые частные случаи общего уравнения прямой:

1. Если $A = 0$, то уравнение имеет вид $y = -\frac{C}{B}$
   Это уравнение прямой, параллельной оси OX.
2. Если $B = 0$, то прямая параллельна оси $OУ$.
3. Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

Уравнение прямой, проходящей *через точку* $M_0(x_0\ y_0,)$ *перпендикулярно ненулевому вектору*, $\bar{n} = (A, B)$ получим, если запишем условие перпендикулярности векторов $\bar{n} = (A, B)$ и $\bar{M_0M}$, где точка $M(x, y)$ произвольная точка прямой.

$\bar{n}\bar{M_0}M = 0$ или $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$. Это уравнение можно переписать в виде $Ax + By + C = 0$, где $C = Ax_0 - By_0$.

Уравнение прямой проходящей через две точки известно из школы:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

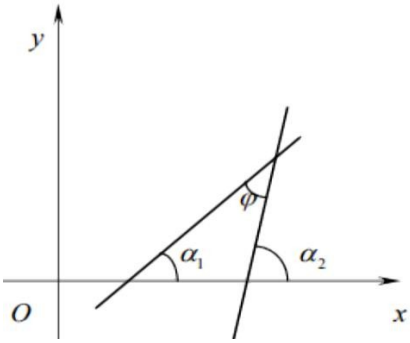
Если прямая пересекает ось OX в точке $M_1(a, 0)$, а ось $OУ$ в точке $M_2(0, b)$. В этом случае

$$\frac{x-a}{0-a} = \frac{y-0}{b-0}, \text{ т.е } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Оно называется *уравнением прямой в отрезках*.

3.6. Прямая на плоскости. Основные задачи.

Пусть прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$. Найдем *угол* φ, на который надо повернуть одну прямую вокруг точки их пересечения до совпадения с другой прямой.



Имеем $\alpha_2 = \varphi + a_1$ (внешний угол треугольника) или $\varphi = \alpha_2 - \alpha_1$. Тогда $\text{tg}\varphi = \text{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\text{tg}a_2 - \text{tg}a_1}{1+\text{tg}a_1 \text{tg}a_2}$

с учетом $k_1 = tga_1$, $k_2 = tga_2$, получим $\text{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1+k_1 k_2}$

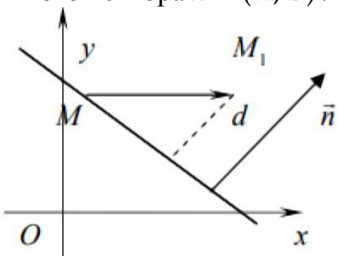
Если прямые *параллельны*, то $k_1 = k_2$

Если прямые *перпендикулярны*, то $k_1 k_2 = -1$

Если прямые заданы уравнениями $A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$ и $A_2 x + B_2 y + C_2 = 0$, то условие *перпендикулярности* запишется $A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0$. А условие параллельности

запишется $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Найдем расстояние от точки $M_1(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$. Расстояние d равно модулю проекции вектора $\overline{MM_1}$, где M - произвольная точка прямой на направление нормального вектора $\bar{n} = (A, B)$.

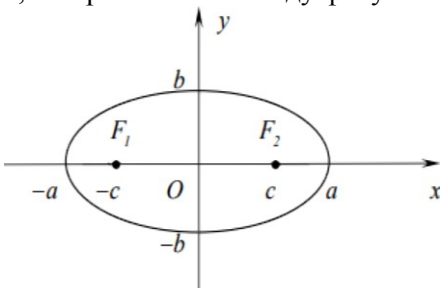


$d = |\text{пр}_{\bar{n}}\overline{M_1M}| = |\frac{\overline{M_1M}\cdot\bar{n}}{|\bar{n}|}| = |\frac{(x_0-x)(y_0-y)}{\sqrt{A^2+B^2}}| = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$,

так как т.M принадлежит прямой $Ax + By + C = 0$

3.7. Линии второго порядка.

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от которых до двух данных точек, называемых *фокусами*, есть величина постоянная (равная $2a$, $a > 0$), большая, чем расстояние между фокусами ($2c$).



Проведем ось OX через фокусы эллипса, от F_1 до F_2. Начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2. Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.

Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит эллипсу, векторы $|\bar{r}_1|$ и $|\bar{r}_2|$ называются ее *фокальными радиус-векторами*.

По определению $|r_1| + |r_2| = 2a$, отсюда

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \Rightarrow$

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \Rightarrow$

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \Rightarrow$

$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 + 2xc + c^2 + y^2 \Rightarrow$

$xc - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$

$x^2c^2 - 2xa^2c + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + a^2y^2 \Rightarrow$

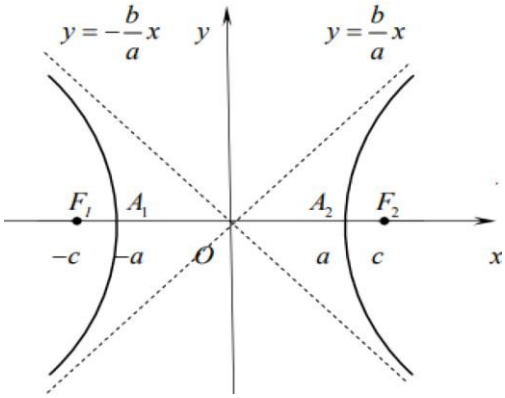
$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Обозначив $a^2 - c^2 = b^2$, получим *каноническое уравнение* эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Эллипс пересекает координатные оси в точках $A_1(-a, 0), A_2(a, 0), B_1(0, b), B_2(0, -b)$ которые называются *вершинами эллипса*. Отрезки $|A_1A_2| = 2a$, $|B_1B_2| = 2b$ называются *большой и малой осями* эллипса. Эллипс симметричен относительно осей координат и начала координат. Форму эллипса можно охарактеризовать с помощью *эксцентриситета* $\varepsilon = \frac{c}{a} (0 < \varepsilon < 1)$. Чем больше эксцентриситет, тем более вытянут вдоль оси OX эллипс. Если $\varepsilon = 0$, то эллипс превращается в окружность.

Гиперболой называется множество точек на плоскости, модуль разности расстояний, от которых до двух данных точек, называемых фокусами, есть величина постоянная (равная $2a, a > 0$) , меньшая, чем расстояние между фокусами.

Проведем ось OX через фокусы гиперболы. Начало координат возьмем в середине отрезка F_1F_2 . Фокусы имеют координаты $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$.



Пусть точка *M (x;y),* принадлежит гиперболе, в силу определения гиперболы для фокальных радиус-векторов r_1 и r_2 выполняется $|\overrightarrow{r_1}-\overrightarrow{r_2}|=2a$. Выполним аналогичные преобразования и обозначив $c^2-a^2=b^2$, получим *каноническое уравнение гиперболы* $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Гипербола симметрична относительно осей координат и начала координат, состоит из двух веток, которые пересекаются с осью *OX* в точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, которые называются *вершинами гиперболы*. Отрезок $|A_1A_2|=2a$ называется *вещественной осью*. Точки $B_1(0,b)$, $B_2(0,-b)$ называются *мнимыми вершинами гиперболы*, отрезок $|B_1B_2|=2b$ называют *мнимой осью*. Форму гиперболы характеризует эксцентриситет $\varepsilon=\frac{c}{a}$. Ясно, что $\varepsilon>1$, причем, чем ближе он к единице, тем сильнее ветви гиперболы прижаты к оси Ох .

Гипербола имеет асимптоты $y=\pm\frac{b^2}{a^2}$

Кривая, определяемая уравнением $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ гипербола симметричная относительно оси *OX*. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$, имеющие общие асимптоты называются *сопряженными*.

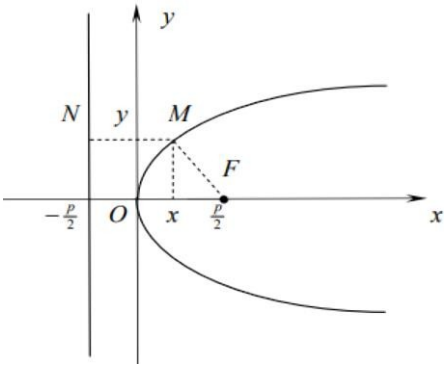
Параболой называется множество точек на плоскости,

равноудаленных от данной прямой, называемой *директрисой* параболы и от данной точки, называемых *фокусом*.

Проведем ось OX через фокус перпендикулярно директрисе. Расстояние от директрисы до фокуса обозначим через p и назовем его *параметром параболы*. Начало координат возьмем в середине отрезка, соединяющего фокус с директрисой. Опустим из точки $M(x, y)$ на параболе перпендикуляр на директрису. Пусть его основание точка N, тогда $|NM| = |FM|$, откуда следует

$(x + \frac{p}{2})^2 = (x - \frac{p}{2})^2 + y^2 \Rightarrow y^2 = 2px$. Имеем *каноническое уравнение параболы* $y^2 = 2px$

Парабола симметрична относительно оси OX и проходит через начало координат.



Уравнения $y^2 = -2px$, $x^2 = 2qy$, $x^2 = -2qy$ также определяют параболы.

Рассмотренные выше кривые второго порядка имеют канонические уравнения только относительно специально подобранных систем координат. В произвольной системе координат уравнение второго порядка имеет вид

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2b_1x + 2b_2y + c = 0$$

Это *общее уравнение кривой второго порядка*.

Привести его к каноническому виду можно с помощью преобразований координат, причем вид кривой можно

определить сразу, вычислив определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Если $\Delta > 0$, то кривая эллиптического типа.

Если $\Delta < 0$, то кривая гиперболического типа.

Если $\Delta = 0$, то кривая параболического типа.

Возможны и другие, так называемые, вырожденные случаи: для эллипса в точку, для гиперболы в пару пересекающихся прямых, для параболы в пару параллельных прямых.

Поворот осей позволяет избавиться от слагаемого, содержащего произведение xy, а параллельный перенос от слагаемых, содержащих x и y.

3.8. Плоскость в трехмерном пространстве.

Пусть в пространстве плоскость Q задана точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$, и вектором $\bar{n} = (A, B, C)$, перпендикулярным этой плоскости. Выведем уравнение этой плоскости. Возьмем на ней произвольную точку $M(x, y, z)$ и составим вектор $\overline{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. При любом расположении точки $M(x, y, z)$ на плоскости Q векторы $\bar{n}$ и $\overline{M_0M}$ взаимно перпендикулярны, поэтому их скалярное произведение равно нулю:

$\bar{n} \cdot \overline{M_0M} = 0$, то есть $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

Это уравнение называется *уравнение плоскости в векторной форме*. Вектор $\bar{n} = (A, B, C)$ *называется нормальным вектором плоскости*.

Обозначая через $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$, запишем уравнение в виде $Ax + By + Cz + D = 0$. Это уравнение называется *общим уравнением плоскости*.

Частные случаи общего уравнения плоскости:

1. Если $D = 0$, то уравнение принимает вид

$Ax + By + Cz = 0$. Этому уравнению удовлетворяет точка $O(0,0,0)$. Плоскость проходит через начало

координат.

2. Если $C = 0$, то уравнение принимает вид $Ax + By + D = 0$. Нормальный вектор $\bar{n} = (A, B, 0)$ перпендикулярен оси OZ. Следовательно, плоскость параллельна оси OZ; если $B = 0$ — параллельна оси OУ, если $A = 0$ — параллельна оси OX.

3. Если $C = D = 0$, то плоскость проходит через $O(0,0,0)$ параллельно оси OZ, т.е. проходит через ось OZ. Аналогично с другими осями.

4. Если $A = B = 0$, то уравнение принимает вид $Cz + D = 0$ или $z = -\frac{D}{C}$/ Плоскость параллельна плоскости OXУ. Аналогично с другими плоскостями.

5. Если $A = B = D = 0$, то уравнение принимает вид $Cz = 0$ или $z = 0$. Это уравнение плоскости OXУ. Аналогично с другими плоскостями.

Через три точки пространства, не лежащие на одной прямой, проходит единственная плоскость. Найдем уравнение плоскости Q, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$. Возьмем произвольную точку $M(x, y, z)$ на плоскости и составим векторы

$$\bar{M_1M} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$
$$\bar{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$
$$\bar{M_1M_3} = (x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$$

Эти векторы лежат в плоскости Q, следовательно, они компланарны. Запишем условие компланарности трех векторов (смешанное произведение равно нулю):

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

Таким образом получаем *уравнение плоскости проходящей через три точки*.

Пусть плоскость отсекает на осях OX, OУ и OZ соответственно отрезки a, b, c, т.е. проходит через точки $A(a, 0,0)$, $B(0, b, 0)$, $C(0,0, c)$. Подставляя координаты точек в

предыдущее уравнение, получим:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Раскрыв определитель, получим $bcx + acy + abz = abc$ или

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

уравнение плоскости в отрезках.

Положение плоскости Q полностью определяется единичным вектором e, имеющим направление перпендикуляра, опущенного на плоскость из начала координат, и длиной p этого перпендикуляра. Пусть α, β, γ — углы, образованные e с осями координат. Тогда $e = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$ на плоскости произвольную точку M (x, y, z) и ее радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OM} = (x, y, z)$. Тогда $\text{пр}_{\bar{e}} = p$, т.е. $\bar{r} \cdot \bar{e} = p$ *нормальное уравнение плоскости в векторной форме*. Зная координаты векторов, можно записать

$$xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma = p$$

Это уравнение называется *нормальным уравнением плоскости в координатной форме*.

Отметим, что общее уравнение плоскости можно привести к нормальному уравнению умножив обе части уравнения на нормирующий множитель $\lambda = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 B^2 C^2}}$, где знак берется противоположным знаку свободного члена D общего уравнения плоскости.

3.9. Плоскость. Основные задачи.

Пусть заданы две плоскости Q_1 и Q_2: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$. Угол φ между плоскостями это угол между нормалями $\vec{n_1} = (A_1, B_1, C_1)$ и $\vec{n_2} = (A_2, B_2, C_2)$. Поэтому

$$cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot \vec{n}_2|} \text{ или } cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Если плоскости *перпендикулярны*, то перпендикулярны и

их нормали, то есть $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ — условие перпендикулярности двух плоскостей.

Если плоскости параллельны, то параллельны и их нормали, то есть $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ — условие *параллельности* двух плоскостей.

Пусть задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и плоскость Q своим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. Расстояние d от точки до плоскости находится по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

3.10. Уравнение прямой в пространстве.

Положение прямой в пространстве определено, если задана какая-либо точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямой и вектор $S = (m, n, p)$, параллельный этой прямой — направляющий вектор.

Возьмем на прямой произвольную точку $M(x, y, z)$. Обозначим радиус-векторы точек M_0 и M соответственно $\vec{r_0}$ и $\vec{r}$. Очевидно, что $\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{M_0M}$, но $\vec{M_0M} = t\vec{S}$, где t — числовой множитель, называемый параметром. Окончательно запишем $\vec{r} = \vec{r_0} + tS$. Это уравнение называется *векторным уравнением прямой*.

Замечая, что $r = (x, y, z)$, $r_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $tS = (tm, tn, tp)$, векторное уравнение прямой можно записать в виде:

$$\vec{xi + yj + zk} = (x_0 + tm)i + (y_0 + tn)j + (z_0 + tp)\vec{k}$$

Отсюда следуют равенства:

$x = x_0 + tm$, $y = y_0 + tn$, $z = z_0 + tp$. Они называются *параметрическими уравнениями прямой*.

Векторы $\vec{M_0M}$ и $\vec{S}$ коллинеарные, значит их координаты пропорциональны: $\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$. Это уравнение называют *каноническим уравнением прямой*.

Замечание. Обращение в ноль одного из знаменателей означает обращение в ноль соответствующего числителя.

Пусть прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$. В качестве направляющего вектора можно взять вектор $S = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, следовательно $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$. Согласно уравнению, можно записать

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

уравнение прямой, проходящей через две точки.

Прямую в пространстве можно задать как линию пересечения двух непараллельных плоскостей: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$

Это *общее уравнение прямой*. От него можно перейти к каноническому уравнению. Координаты точки M_0 получаем из системы уравнений, придав одной переменной произвольное значение (например, $z = 0$). Т.к. прямая перпендикулярна векторам $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$, то за направляющий вектор можно принять $\vec{n_1} \times \vec{n_2}$.

Замечание. Каноническое уравнение легко получить, взяв две какие-либо точки на ней и применив уравнение прямой, проходящей через две точки.

3.11. Прямая в пространстве. Основные задачи.

Угол между прямыми - это угол между направляющими векторами $S_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $S_2 = (m_2, n_2, p_2)$. Поэтому

$$cos\varphi = \frac{\vec{S_1}\vec{S_2}}{|\vec{S_1}||\vec{S_2}|} = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Если прямые *перпендикулярны*, то $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Если прямые *параллельны*, то $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Прямая $\frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}$ проходит через точку $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и имеет направляющий вектор $S_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Если $S_2 \parallel S_1$, то прямые параллельны. В противном случае прямые либо пересекаются, либо скрещивающиеся.

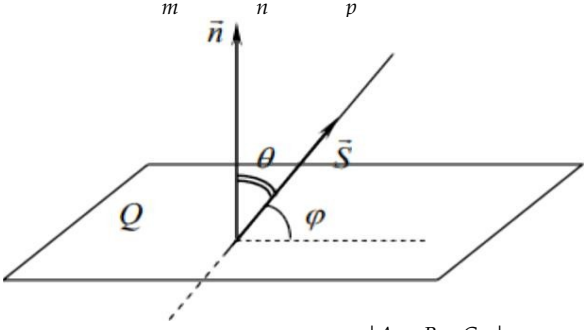
Прямые лежат в одной плоскости, если векторы
$\vec{S_1} = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{S_2} = (m_2, n_2, p_2)$,
$\vec{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ компланарны. То есть

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0$$

В этом случае прямые пересекаются.

3.12. Прямая и плоскость в пространстве. Основные задачи.

Плоскость задана уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, а прямая уравнениями $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$



$$\sin\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta = \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}.$$

Если прямая и плоскость *параллельны*, то векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ перпендикулярны, то есть $Am + Bn + Cp = 0$.
Прямая *перпендикулярна* плоскости если векторы $\vec{n}$ и $\vec{S}$ параллельны, поэтому $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Пусть требуется найти точку пересечения прямой $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$.
Для этого надо решить систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p} \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

Если переписать уравнение прямой в параметрическом виде

$$\begin{cases} x=x_0+tm \\ y=y_0+tn \\ z=z_0+tp \end{cases}$$

и подставить эти выражения в уравнение плоскости, получим

$A(x_0+tm)+B(y_0+tn)+C(z_0+tp)+D=0$ или

$t(Am+Bn+Cp)+(Ax_0+By_0+Cz_0+D)=0$.

Если прямая не параллельна плоскости, то есть $Am+Bn+Cp\neq 0$, находим $t=-\dfrac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{Am+Bn+Cp}$.

Подставив найденное значение t в параметрические уравнения прямой, найдем координаты точки пересечения прямой и плоскости.

Пример. Найти точку пересечения прямой и плоскости.

$\dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-3}{-2}$ и $x+3y-5z+9=0$

Решение:

Запишем параметрические уравнения прямой:

$$\frac{x+1}{-3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{-2}=t \quad \Rightarrow \begin{cases} x=-1-3t \\ y=-2+2t \\ z=3-2t \end{cases}$$

Подставляем в уравнение плоскости:

$(-1-3t)+3(-2+2t)-5(3-2t)+9=0$

$-1-3t-6+6t-15+10t+9=0$

$13t-13=0 \Leftrightarrow t=1$

Следовательно, координаты точки пересечения прямой и плоскости будут (-4; 0; 1).

Рассмотрим случай, когда $Am+Bn+Cp=0$:

1. Если $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D\neq 0$, то прямая параллельна плоскости.

2. Если $F=Ax_0+By_0+Cz_0+D=0$, то прямая лежит в плоскости.

Если плоскость и прямая параллельны, становится

актуальна задача вычисления расстояния от прямой до плоскости или от точки до плоскости. При этом, первая задача сводиться ко второй, если мы укажем точку на заданной прямой.

Пример. Найти расстояние от точки А (2, 3, -1) до плоскости $7x - 6y - 6z + 42 = 0$

Решение: Расстояние от точки до плоскости определяется по формуле $d = |\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}|$, в которой следует положить $A = 7$, $B = -6$, $C = -6$, $x_1 = 2$, $y_1 = 3$, $z_1 = -1$. Подставляя эти значения в формулу, будем иметь

$$d = |\frac{7 \cdot 2 + (-6) \cdot 3 + (-6) \cdot (-1) + 42}{\sqrt{7^2 + (-6)^2 + (-6)^2}}| = |\frac{14 - 18 + 6 + 42}{11}| = 4.$$

3.13. Поверхности второго порядка.

Поверхность, образованная движением прямой L, сохраняющей постоянное направление, вдоль некоторой кривой K, называется *цилиндрической поверхностью* или *цилиндром*. Кривая K называется *направляющей,* а прямая L — *образующей*.

Пусть кривая K лежит в плоскости OXY и ее уравнение $F(x, y) = 0$, а прямая L параллельна оси OZ.

Название цилиндра определяется названием направляющей: эллиптический (круговой), гиперболический и параболический цилиндр.

Поверхность, образованная прямыми линиями, проходящими через данную точку P и пересекающими данную линию K, называется *конической поверхностью* или *конусом*.

Линия K — *направляющая*, точка P — *вершина*, а прямая, описывающая поверхность — *образующая*.

3.14. Канонические уравнения поверхностей второго порядка.

Эллипсоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad (a>0, b>0, c>0\ ).$$

Исследуем данную поверхность методом сечений. Проведем плоскость параллельную плоскости *OXY*. Уравнение такой плоскости $z=h$. Линия, получаемая в сечении, определяется системой уравнений

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=h\end{cases} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}$$

1. Если $|h|>c$, $c>0$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$. Точек пересечения поверхности с плоскостью нет.

2. Если $|h|=c$, $h=\pm c$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$. Линия пересечения вырождается в две точки $(0,0,-c)$ и $(0,0,c)$. Плоскости $z=c$ и $z=-c$ касаются данной поверхности.

3. Если $|h|<c$, получим уравнение:

$\frac{x^2}{(a^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})2}+\frac{y^2}{(b^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})2}=1$. Это эллипс с полуосями

$a_1=a^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$ и $b_1=b^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, причем чем меньше $|h|$, тем больше полуоси a_1 и b_1.

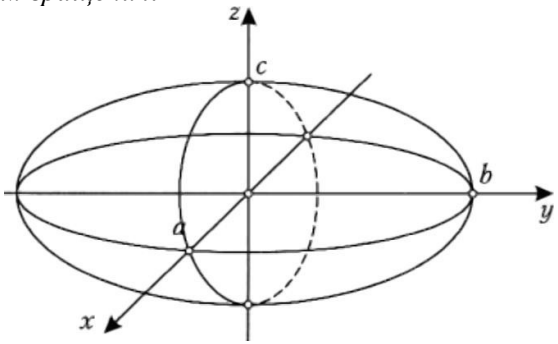
Аналогичные результаты получатся при сечении плоскостями $x=h$ и $y=h$.

Данная поверхность симметрична относительно всех трех координатных осей. Координатные оси пересекаются с поверхностью в точках $(\pm a,0,0),(0,\pm b,0),(0,0,\pm c)$. Параметры a, b, c называются *полуосями эллипсоида.*

Если $a=b=c$, то эллипсоид превращается в сферу $x^2+y^2+z^2=a^2$.

Если любые две полуоси равны, то эллипсоид называется

эллипсоидом вращения.



Однополостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0, b>0, c>0\ ).$$

Применим метод сечений:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,.$$ Это гипербола в плоскости *YOZ*.

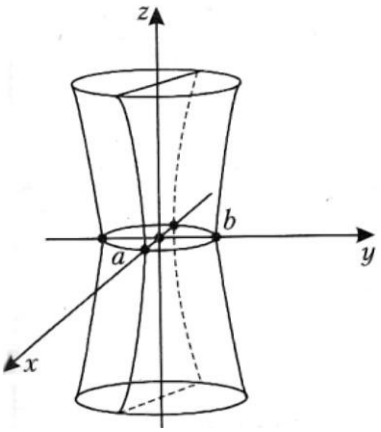
Аналогично в плоскости *XOZ* имеем гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

В плоскости *XOУ* имеем эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

Сечение $z=h$ дает нам эллипс $\frac{x^2}{(a^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})2}+\frac{y^2}{(b^2\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}})2}=1$,

полуоси которого возрастают по мере удаления от начала координат.

В сечениях параллельных координатным плоскостям *YOZ* и *XOZ* получим гиперболы.



Двуполостным гиперболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (a>0, b>0, c>0\ ).$$

Применим метод сечений:

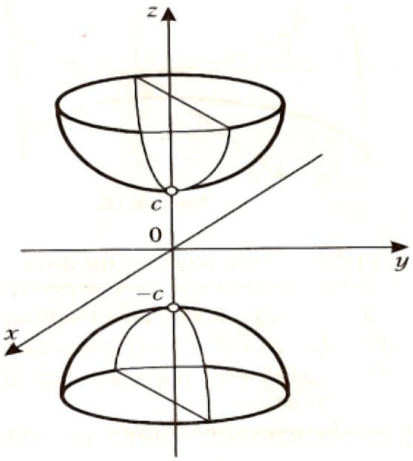
$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\\ x=0\end{cases} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$. Это соотношение не имеет смысла, значит поверхность не пересекает плоскость *YOZ*.

Положим $y=0$ получим в плоскости *XOZ* гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

В плоскости *XOУ* имеем гиперболу $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

Сечение $x=h$ дает нам эллипс $\frac{y^2}{(b\sqrt{\frac{h^2}{a^2}-1})2}+\frac{z^2}{(c\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1})2}=1$, полуоси которого возрастают по мере удаления от начала координат.

Поверхность вытянута вдоль оси *OX* и представляет собой две полости.



Эллиптическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

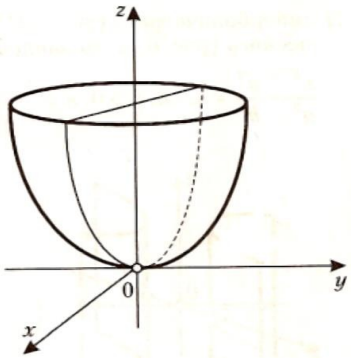
$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \ .$$

Отметим, что $z > 0$ при любых x и y. Причем $z = 0$ при $x = 0, y = 0$. Значит проходит через начало координат и лежит в верхнем полупространстве.

Сечение, проходящее через ось *OZ,* дает параболу, вытянутую вдоль оси *OZ*: $x^2 = 2pz$, $y^2 = 2qz$.

Сечение $z=h$ дает эллипс $\frac{x^2}{(\sqrt{2ph})^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{2qh})^2} = 1.$

Поверхность имеет форму чаши. Если $p = q$ поверхность называется *параболоидом вращения*.



Гиперболическим параболоидом называется поверхность, каноническое уравнение которой имеет вид

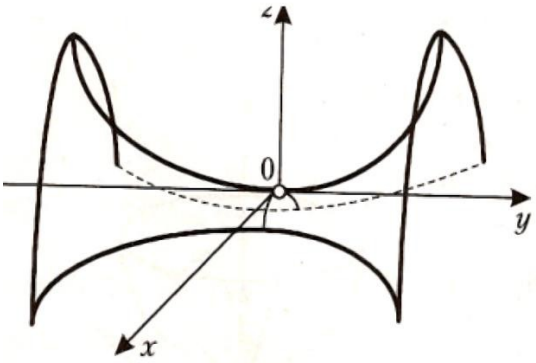
$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p > 0, q > 0) \quad .$$

Сечение плоскостью z=0 дает пару пересекающихся прямых: $\frac{y}{\sqrt{q}} - \frac{x}{\sqrt{p}} = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{q}} + \frac{x}{\sqrt{p}} = 0.$ То есть поверхность пересекается с *XOУ* по прямым линиям.

При $x = 0$ в плоскости *YOZ* получим параболу $y^2 = -2qz$.

Полагая $x = h$, получим ту же параболу, но приподнятую вверх $y^2 = -2qz + \frac{qh^2}{p}$.

В плоскости *XOZ* имеем параболу $x^2 = 2pz$. Поверхность имеет форму седла.



Тренировочные задания

ГЛАВА I. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

№1. Вычислить матрицу C, если даны матрицы A и B

$C = -2B + (A \cdot B)^T$

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

№2. Найти все миноры определителя

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 1 \\ 9 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

№3. Найти обратную матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

№4. Вычислить определитель

а) Разложением по элементам какой-либо строки или столбца

б) Сведением к треугольному виду.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

№5. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 18 & -19 & -8 & -25 & 2 \\ 0 & -4 & 0 & -3 & 3 \\ -3 & 2 & -1 & 4 & -5 \\ 5 & -3 & -3 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

№6. Решить систему уравнений

а) Методом обратной матрицы

б) Методом Крамера

в) Методом Гаусса

$$\begin{cases} 4x - 3y - z = 4 \\ 3x - y - 5z = -10 \\ 3x - 2y - 2z = -14 \end{cases}$$

№7. Найти общее и два частных решения системы уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 - x_4 = 3 \\ 9x_1 - 9x_2 - 6x_3 - 7x_4 = -3 \\ 11x_1 - 16x_2 - 9x_3 - 8x_4 = 3 \end{cases}$$

№8. Найти собственные числа и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

№9. Определить, при каких значениях λ квадратичная форма положительно определена.

$$\lambda x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2 - 2\lambda x_1 x_2 - 2x_2 x_3$$

ГЛАВА 2. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

№1. Найти координаты вектора $\overline{AB}$ и его длину, если

A(-1;2), B(-1;3)

№2. Вычислить направляющие косинусы вектора $\bar{a}$ (-6;10)

№3. Найти: $\bar{a} + \bar{b}$; $\bar{a} - \bar{b}$; $2\bar{a} - 3\bar{b}$; $-\bar{a} + 4\bar{b}$, если $\bar{a}$ (0;-3;1) и $\bar{b}$ (0;-2;4)

№4. При каком λ коллинеарны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}$ (1;3;1) и $\bar{b}$ (4;λ;4)

№5. Найти скалярное произведение $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 4$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

№6. Найти скалярное произведение $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}$ (3;-6), $\bar{b}$ (6;3)

№7. Вычислить угол между $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a}$ (2;3), $\bar{b}$ (-4;1)

№8. При каком λ векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны, если $\bar{a}$ (2; λ;3) и $\bar{b}$ (4 λ;3;1)

№9. Найти $\angle C$ в треугольнике ABC, если A(2;1;1), B(3;-2;6), C(1;3;-1)

№10. Найти площадь треугольника ABC, если A(-2;0;1), B(5;2;3), C(3;-3;-1)

№11. Показать, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют базис в пространстве и разложить вектор $\bar{d}$ по этому базису

$$\bar{a} = \{3;4;3\},\ \bar{b} = \{6;4;2\},\ \bar{c} = \{-1;1;-3\},\ \bar{d} = \{-3;1;7\}$$

№12. Доказать, что внутренние углы треугольника ABC, где A(3;-2;5), B(-2;1;-3) и C(5;1;-1) острые

№13. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} - 5\vec{k}$, $\vec{c} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}$. Вычислить $np_{\vec{c}}(\vec{a} - \vec{b})$

№14. Даны точки A(3;-4;-2), B(2;5;-2). Найти проекцию

вектора $\vec{AB}$ на ось, составляющую осями координат *OX* и *OУ* углы 60 и 120 градусов, а *OZ* – тупой угол

№15. Даны точки A(3;-2;5), B(-2;1;-3) и C(5;1;-1). Найти координаты векторных произведений $|\vec{AB} \times \vec{BC}|$; $|\vec{BC} \times 2\vec{CA} \times \vec{CB}|$

№16. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\frac{3\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить: $|(2\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + 2\vec{b})|$, $|(\vec{a} - 3\vec{b}) \times (3\vec{a} - \vec{b})|$

ГЛАВА 3. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

№1. Даны координаты вершин треугольника ABC.
$A(-8; -3)$, $B(4;-12)$, C(8;10). Найти: длину стороны *AB*; уравнения сторон *AB* и *BC* и их угловые коэффициенты; угол *B* в радианах с точностью до двух знаков; уравнение высоты *CD* и ее длину; уравнение медианы *AE* и координаты точки *K* − точки пересечения этой медианы с высотой *CD*; уравнение прямой, проходящей через точку *K* параллельно стороне *AB*; координаты точки *M*, расположенной симметрично точки *A* относительно прямой *CD*.

№2. Показать, что уравнение $7x^2+2y^2+112x-44y+74=0$ определяет эллипс, найти его оси, координаты центра, фокусы и эксцентриситет. Изобразить данный эллипс.

№2. Составить уравнение геометрического места точек, отношение расстояний которых до данной точки $A(x_1; y_1)$ и до данной прямой $x = a$ равно числу . Полученное уравнение привести к простейшему виду и затем построить кривую.
$A(6; 0)$, $x = 1{,}5$, $= 2$.

№3. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от данной точки $A(x_1; y_1)$ и данной прямой $y = b$. Полученное уравнение привести к простейшему виду и

затем построить кривую. $A(2; 5)$, $y = 1$.

№4. Даны координаты точек $A(-3; 4)$, $B(-5; 4\sqrt{5})$.

Требуется: Составить каноническое уравнение гиперболы, проходящей через данные точки A и B, если фокусы расположены на оси абсцисс. Найти полуоси, фокусы, эксцентриситет и уравнения асимптот этой гиперболы. Найти все точки пересечения гиперболы с окружностью, центр которой находится в начале координат и известно, что эта окружность проходит через фокусы гиперболы. Построить гиперболу, ее асимптоты и окружность.

№5. Даны координаты точек $A(4; -2)$; и $B(2; \sqrt{7})$ и радиус окружности $R=2\sqrt{5}$, центр которой находится в начале координат. Требуется: Составить каноническое уравнение эллипса, проходящей через данные точки A и B. Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет этого эллипса. Найти все точки пересечения эллипса с данной окружностью. Построить эллипс и окружность.

№6. Даны четыре вершины четырехугольника $A(-9; 0)$, $B(-3; 6)$, $C(3; 4)$ и $D(6; -3)$. Найти точку пересечения его диагоналей AC и BD и вычислить угол между ними.

№7. Составить уравнения высот треугольника, зная уравнения его сторон $2x - y + 3 = 0$, $x - 5y + 7 = 0$ и $3x + 2y + 6 = 0$.

№8. Найти площадь треугольника, ограниченного осью абсцисс и прямыми $x - y + 3 = 0$ и $2x + y + 12 = 0$.

№9. Составить уравнение прямой, проходящих через точку пересечения прямых $x + 2y - 4 = 0$ и $3x - y - 9 = 0$ перпендикулярно прямой $x + y + 7 = 0$.

№10. Даны координаты вершин пирамиды $ABCD$. $A(2; 3; -1)$; $B(6; 1; -1)$; $C(4; 8; -9)$; $D(2; -1; 2)$. Требуется: Записать векторы $\overline{AB}, \overline{AC}$ и $\overline{AD}$ в системе орт и найти модули этих векторов. Найти угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Найти

проекцию вектора $\overline{AD}$ на вектор $\overline{AB}$. Найти площадь грани *ABC*. Найти объем пирамиды *ABCD*.

№11. Даны координаты точек *A*(–3; –2; –4); *B*(–4; 2; –7); *C*(5; 0; 3); *M*(–1; 3; 0). Требуется: Составить уравнение плоскости *Q*, проходящей через точки *A*, *B* и *C*. Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку *M*, перпендикулярно плоскости *Q*. Найти точки пересечения полученной прямой с плоскостью Q и с координатными плоскостями *XOY*, *XOZ* и *YOZ*. Найти расстояние от точки *M* до плоскости *Q*.

№12. Даны координаты точек *A*(3; –1; 5); *B*(7; 1; 1); *C*(4; –2; 1). Требуется найти: Канонические уравнения прямой *AB*. Уравнение плоскости, проходящей через точку *C* перпендикулярно прямой *AB* и точку пересечения этой плоскости с прямой *AB*. Расстояние от точки *C* до прямой *AB*.

№13. Найти угол между плоскостью *P*, проходящей через точки A_1, A_2 и A_3 и плоскостью *P*, заданной уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$. $A_1(3; -5; 1)$; $A_2(-2; 3; 0)$; $A_3(0; -3; 4)$; $x + 3y + z + 1 = 0$.

№14. Четыре вектора $\overline{a}\{a_x, a_y, a_z\}$, $\overline{b}\{b_x, b_y, b_z\}$, $\overline{c}\{c_x, c_y, c_z\}$ и $\overline{d}\{d_x, d_y, d_z\}$. Показать, что векторы $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ образуют базис и разложить по этому базису вектор $\overline{d}$.

$\overline{a}$ (3; 4; 1); $\overline{b}$ (2; –1; 0); $\overline{c}$ (–2; 3; 1); $\overline{d}$ (4; 7; 1).

№15. Дан тетраэдр *АВСД*. *А*(-1;-2;4), *В*(0;5;3), *С*(4;3;1), *Д*(0;3;6), *М*(2;1;-3), *К*(1;1;1). Найти уравнения плоскостей *АВС, АВД, ВСД, АСД*. Угол между гранями *АВС и АВД*. Угол между прямой *АД* и плоскостью *ВСД*. Расстояние от точки *Д* до плоскости *АВС*.Уравнение прямых *АВ*, *ВД* в пространстве. Установить взаимное расположение прямых *СД* и *МК* в пространстве (параллельны, перпендикулярны, пересекаются). Установить взаимное расположение плоскостей *АВС* и *ДМК*.

№16. Дано уравнение линии в полярной системе

координат. Найти уравнение этой линии в виде $F(x;y)=0$ и построить ее. $\rho=\frac{3}{4-3\sin\varphi}$

№17. Даны параметрические уравнения линий, исключив параметр *t*, найти уравнение этой линии в виде $F(x;y)=0$. Сделать схематический рисунок.

$$\begin{cases} x=2\cos^2 t \\ y=3\sin^2 t \end{cases}$$

№18. Определить тип поверхности второго порядка, заданной уравнением $\frac{x^2}{m}-\frac{y^2}{n}-\frac{z^2}{p}=1$ и проходящей через три данные точки. *A*(5; 1; –4), *B*(0; 3; 5), *C*(–1; –2; 4).

Тренировочный тест

1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$

а) -22 ***б)*** 22 ***в)*** 26 ***г)*** -7

2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 4 & 8 & -10 \end{vmatrix}$

а) 24 ***б)*** -15 ***в)*** 8 ***г)*** 0

3. Если в определителе поменять местами два столбца, то определитель

а) увеличится ***б)*** уменьшится ***в)*** изменит знак ***г)*** не изменится

4. Решить систему уравнений $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x-7y-z=8 \end{cases}$

а) Нет решений ***б)*** $(1;1;1)$

в) Бесконечно много решений ***г)*** $(1;-1;1)$

5. Если $rang\,A = rang\,\overline{A} = n$, то

а) система совместна и неопределенна

б) система совместна и определена

в) система несовместна

6. Система уравнений называется совместной, если

а) она имеет решение

б) если уравнений меньше, чем переменных

в) если уравнений больше, чем переменных

г) количество уравнений равно числу переменных

7. Для данных матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

найти матрицу $C = A \cdot B$

а) $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 10 & -9 \end{pmatrix}$ ***б)*** $\begin{pmatrix} 13 \\ 5 \end{pmatrix}$ ***в)*** $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & 9 & 7 \end{pmatrix}$

г) Не существует

8. Умножение матриц происходит в случае, когда:

а) Число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы

б) Число столбцов второй матрицы равно числу строк первой матрицы

в) Число строк первой матрицы равно числу столбцов второй матрицы

9. Выберите определение, которое не соответствует понятию ранга матрицы:

а) Наивысший порядок отличных от нуля миноров

б) Максимальное число линейно-независимых строк

в) Максимальное число линейно-независимых столбцов

г) Число не равных нулю элементов матрицы

10. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к квадратной матрице A, если выполняется условие:

а) $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ ***б)*** $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$

в) $A^{-1} \cdot E = E \cdot A^{-1} = A$

11. Алгебраическое дополнение элемента a_{12} для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ равно:

а) $A_{12} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ ***б)*** $A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$ ***в)*** $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$

12. Выберите определение, которое не соответствует понятию вектора:

а) Направленный отрезок ***б)*** Прямая

в) Упорядоченный набор чисел

13. Вектор $\bar{j}$ имеет координаты:

а) (1; 0; 0) ***б)*** (1; 1; 1) ***в)*** (0; 1; 0) ***г)*** (0; 0; 1)

14. Даны векторы $\bar{a}$ (3; 6; 0) и $\bar{b}$ (–2; 4; 1). Скалярное произведение этих векторов равно:

а) 11 ***б)*** –36 ***в)*** –18 ***г)*** 18

15. Даны точки $A(2;4)$ и $B(0;-3)$. Длина вектора $\vec{AB}$ равна:

а) 8 ***б)*** $\sqrt{45}$ ***в)*** 7 ***г)*** $\sqrt{53}$

16. Может ли вектор составлять с координатными осями углы:

а) $30^\circ, 120^\circ, 60^\circ$ ***б)*** $45^\circ, 45^\circ, 45^\circ$

в) $90^\circ, 90^\circ, 0^\circ$ ***г)*** $0^\circ, 180^\circ, 0^\circ$

17. Если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то

а) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ***б)*** $\vec{a} \perp \vec{b}$ ***в)*** $\vec{a} = \vec{b}$ ***г)*** $\vec{a} = -\vec{b}$

18. Какое произведение векторов в результате дает векторную величину:

а) Скалярное ***б)*** Векторное

в) Смешанное

19. Если даны векторы $\bar{a}(a_1;a_2;a_3)$, $\bar{b}(b_1;b_2;b_3)$ и $\bar{c}(c_1;c_2;c_3)$,то с помощью формулы $\left\|\begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{matrix}\right\|$ вычисляется:

а) Площадь ***б)*** Объем пирамиды

в) Объем параллелепипеда

20. Общее уравнение прямой на плоскости имеет вид:

а) $L: Ax + By + C = 0$ ***б)*** $L: y = kx + b$

в) $L: y - y_0 = k(x - x_0)$

21. Условие параллельности прямых на плоскости:

а) $k_2 = -\frac{1}{k_1}$ ***б)*** $k_2 = \frac{1}{k_1}$ ***в)*** $k_2 = k_1$

22. Даны векторы $\bar{a}$ (–1; 5; 1) и $\bar{b}$ (2; –3; 3). Вектор $3\bar{a} - \bar{b}$ имеет координаты:

а) (–5; 18, 0) ***б)*** (–1; 12, 6)

в) (5; –18, 0) ***г)*** (–3; 15, 3)

23. Даны векторы $\bar{a}$ (3; 2; –1) и $\bar{b}$ (0; 2; –5). Векторное произведение этих векторов имеет координаты:

а) (–8; 15, 6) ***б)*** (0; 4, 5)

в) (3; 4, –6) ***г)*** (–8; –15; 6)

24. Объем треугольной пирамиды с вершинами $A(0; 0; 1)$, $B(2; 3; 5)$, $C(6; 2; 3)$ и $D(3; 7; 2)$ равен:

а) 120 ***б)*** 20 ***в)*** 60 ***г)*** 40

25. Даны точки $A(5; 6; 2)$ и $B(2; 7; –2)$ серединой отрезка является точка с координатами:

а) (3; –1; 0) ***б)*** (3,5; 6,5; 0)

в) (1,5; –0,5; 2) ***г)*** (7; 13; 0)

26. Прямая 4x+3y–36=0 от координатных осей «отсекает» прямоугольный треугольник площадью:

а) 108 ***б)*** 12 ***в)*** 54 ***г)*** 36

27. Дан треугольник с вершинами $A(2; 2)$, $B(–2; –8)$,

$C(-6; -2)$. Уравнение медианы, проведенной из вершины B имеет вид:

а) $x+2=0$ ***б)*** $-2x-8y=0$ ***в)*** $x=0$

г) $4x-3y+11=0$

28. Дан треугольник с вершинами $A(1; 2)$, $B(2; 3)$, $C(-1; 6)$. Уравнение высоты, проведенной из вершины B имеет вид:

а) $y+3=0$ ***б)*** $2x+3y=0$ ***в)*** $-2x+3y+5=0$

г) $x-2y+4=0$

29. Уравнение прямой проходящей через точки $A(1; 2)$ и $B(5; 3)$ имеет вид:

а) $y+3=0$ ***б)*** $x-4y+7=0$ ***в)*** $-2x+3y+5=0$ ***г)*** $x-2y+4=0$

30. Какая линия не является кривой второго порядка:

а) Окружность ***б)*** Парабола ***в)*** Гипербола

г) Эллипс ***д)*** Прямая

31. Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

а) $y^2 = 2px$ ***в)*** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

б) $x^2 = 2py$ ***г)*** $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Основная литература

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс, 4-е изд., М: Айрис Пресс, 2011.- 576 с.

Дополнительная литература

2. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: Учебник. – 13-е изд., испр. – СПБ.: Издательство «Лань», 2015 - 448 с.

3. Бугров Я.С., Никольский С.М. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: Учебник для вузов. – Москва: Наука, 1980 -175 с.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. - СПБ.: Издательство «Лань», 2008. - 239с.