

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«КАМЧАТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
(ФГБОУ ВО «КамчатГТУ»)

Кафедра «Системы управления»

О.В. Мандрикова

## **МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И КОМПЛЕКСЫ ПРОГРАММ**

*программа курса и методические указания к изучению  
дисциплины для обучающихся*  
по направлению подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника»  
(уровень подготовки кадров высшей квалификации)

направленность (профиль)  
«Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Петропавловск-Камчатский,  
2019

## **Мандрикова Оксана Викторовна**

Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ. Программа курса и методические указания к изучению дисциплины для обучающихся направления подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника», направленность (профиль) подготовки «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ». – Петропавловск-Камчатский: КамчатГТУ, 2019. – 102 с.

Программа курса и методические указания к изучению дисциплины для обучающихся направления подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» составлены в соответствии с требованиями федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (уровень подготовки кадров высшей квалификации).

Программа курса и методические указания к изучению дисциплины «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» рассмотрены и утверждены на заседании НТС (протокол № 1 от 11.09.2019 г.).

## **СОДЕРЖАНИЕ**

<b>1. Цели и задачи дисциплины, ее место в учебном процессе</b>	<b>4</b>
1.1. Краткая характеристика дисциплины .....	4
1.2. Цель и задачи дисциплины .....	4
1.3. Связь с предшествующими и последующими дисциплинами .....	5
<b>2. Содержание дисциплины .....</b>	<b>6</b>
2.1. Содержание лекционных занятий .....	6
2.2. Содержание практических занятий.....	93
<b>3. Методические рекомендации.....</b>	<b>98</b>
3.1. Методические рекомендации по изучению курса.....	98
3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям...	98
3.3. Методические рекомендации по подготовке к кандидатскому экзамену...	99
3.4. Вопросы к кандидатскому экзамену.....	100
<b>4. Учебно-методические материалы по дисциплине .....</b>	<b>101</b>
4.1. Основная литература .....	101
4.2. Дополнительная литература .....	101
4.3. Электронные ресурсы .....	102

# **1. ЦЕЛЬ И ЗАДАЧИ ДИСЦИПЛИНЫ, ЕЕ МЕСТО В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ**

## ***1.1. Краткая характеристика дисциплины***

Курс посвящен ознакомлению с классическими и современными методами математического моделирования, численными методами и программирования. Рассмотрено текущее состояние современных научных достижений в области математического моделирования и программирования. Изложены необходимые сведения для формирование общих принципов разработки и анализа математических моделей. Представлено применение традиционных и современных методов математического моделирования на примере задач анализа реальных временных рядов.

## ***1.2. Цель и задачи дисциплины***

**Целью** освоения дисциплины «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» является формирование у аспирантов углубленных теоретических знаний в области математического моделирования.

В связи с этим необходимо реализовать следующие **задачи**:

- актуализировать знания основных понятий из предшествующих дисциплин, особенно важные для математического моделирования;
- ознакомить обучающихся с основными современными задачами и методами математического моделирования;
- ознакомить обучающихся с возможностями современных пакетов вычислительной математики.

Методика преподавания данной дисциплины предполагает чтение лекций , проведение практических занятий, текущих консультаций, самостоятельную работу по изучаемым темам, а также по отдельным специфическим проблемам дисциплины.

Лекции основываются на изучении наиболее важных концептуальных вопросов, связанных с темой раздела и темой лекции. В ее начале очень кратко объясняются концептуальные положения и ключевые понятия. Затем подробно раскрываются отдельные вопросы лекции, основная суть. В конце дается краткое обобщение представленного на лекции материала.

Целью проведения *практических занятий* является закрепление знаний обучающихся, полученных ими в ходе изучения дисциплины на лекциях и самостоятельно, а также формирования определенных профессиональных навыков и умений в области математического моделирования, численных методов и программирования. Практические занятия проводятся в форме опроса по заданной тематике, решения практических задач моделирования на примере реальных временных рядов. Учащимся предлагается возможность обсудить заданную тему с точки зрения использования полученных знаний на практическом опыте при проведении диссертационного исследования. Привести примеры из опыта собственного исследования.

В процессе изучение дисциплины предусмотрена *самостоятельная внеаудиторная работа* обучающегося в форме осуществления информационного поиска материалов для выполнения самостоятельной работы и его анализа. Контроль за выполнением самостоятельных заданий осуществляется в ходе опроса , тестирования, текущих консультаций.

В результате изучения дисциплины *обучающийся должен:*

*знать:*

- основные методы математического моделирования, численных методов и программирования;
- текущее состояние современных научных достижений в области математического моделирования и программирования;
- основные методы исследования математических моделей, численного анализа и программирования;
- теоретические основы создания программных комплексов;
- актуальные проблемы и тенденции развития в области профессиональной деятельности;
- научно-методические основы организации научной-исследовательской деятельности.

*уметь:*

- применять полученные теоретические знания для решения новых практических задач в области профессиональной деятельности;
- генерировать новые идеи при решении исследовательских и практических задач;
- определять актуальные направления исследовательской деятельности;
- мотивировать коллектив на самостоятельный научный поиск, направлять его работу в соответствии с выбранным направлением исследования;
- консультировать по теоретическим, методологическим и др. вопросам, возникающим в процессе научно-исследовательской работы;
- применять полученные теоретические знания в области математического моделирования для решения научно-практических задач;
- использовать современные средства создания комплексов программ;
- использовать полученные научные результаты для создания интеллектуальной собственности.

*владеть:*

- навыками обработки информации и математического анализа полученных данных;
- практическими навыками построения математических моделей реальных задач с использованием качественных, приближенных и численных методов;
- практическими навыками реализации численных алгоритмов на ЭВМ;
- культурой научной дискуссии и навыками профессионального общения с соблюдением делового этикета;
- особенностями научного и научно-публицистического стиля.

### ***1.3. Связь с предшествующими и последующими дисциплинами***

Учебная дисциплина «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» является обязательной дисциплиной вариативной части в структуре образовательной программы, непосредственно связана и базируется на математических дисциплинах подготовки бакалавров и магистров.

Знания, умения и навыки, полученные обучающимися в ходе изучения дисциплины «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» необходимы при подготовке к сдаче и сдаче государственного экзамена, в научно-исследовательской деятельности и подготовке научно-квалификационной работы (диссертации) на соискание ученой степени кандидата наук, а также представлении научного доклада об основных результатах подготовленной научно-квалификационной работы (диссертации).

## 2. СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 2.1. Содержание лекционных занятий

#### Раздел 1. Математические основы моделирования

Тема: «Элементы теории функций и функционального анализа»

Основные понятия темы: мера, лебегова мера, интеграл Лебега, метрические пространства, нормированные пространства, гильбертово пространство.

#### Материалы лекций

##### Понятие меры и интеграла Лебега.

*Мера.* Понятие *меры*  $\mu(A)$  множества  $A$  является естественным обобщением понятий длины  $l(\Delta)$  отрезка  $\Delta$ , площади  $S(F)$  плоской фигуры  $F$ , объема  $V(G)$  пространственной фигуры  $G$ , интеграла от неотрицательной функции, взятого по некоторой линейной, плоской или пространственной области и т.п.

Пусть  $\mathcal{A}$  – некоторая алгебра элементарных множеств. Назовем плоское множество элементарным, если его можно представить хотя бы одним способом как объединение конечного числа попарно непересекающихся прямоугольников. Пусть на алгебре  $\mathcal{A}$  задана функция  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^1$  (т. е. каким-то образом указано правило, по которому любому элементарному множеству  $A \in \mathcal{A}$  ставится в соответствие действительное число  $\mu(A)$ ), обладающая следующими свойствами:

- 1)  $\mu(A) \geq 0$  для всех  $A \in \mathcal{A}$  (мера принимает действительные неотрицательные значения);
- 2)  $\mu(A)$  аддитивна, т.е. если  $A$  – это объединение конечного числа непересекающихся элементарных множеств:

$$A = \sum_{i=1}^n A_i, A_i \in \mathcal{A}, \text{ то } \mu(A) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i).$$

Тогда говорят, что на алгебре  $\mathcal{A}$ , задана *мера*  $\mu$ .

Свойство аддитивности можно записать так:  $\mu\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mu(A_i)$ .

В дальнейшем его заменяют на более сильное свойство *счетной аддитивности* (или  $\sigma$ -аддитивности):  $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ .

Таким образом, мы можем разбивать множество  $A$  и на бесконечно много частей, лишь бы число этих частей было счетным. Множества из алгебры  $\mathcal{A}$ , на которых задана мера  $\mu$ , обычно называют *измеримыми*. Если мы требуем не просто аддитивности, а  $\sigma$ -аддитивности, то и алгебра  $\mathcal{A}$  должна быть  $\sigma$ -алгеброй.

Элементарные множества не исчерпывают всех множеств, которые встречаются в геометрии и в классическом анализе. Поэтому говорят о распространении понятия меры, с сохранением ее основных свойств, на другие более сложные множества. В этом случае говорят о продолжении меры с  $\sigma$ -алгебры элементарных множеств на более широкие

системы множеств. Как правило используется так называемое *продолжение меры по Лебегу*.

*Лебегова мера.* Рассмотрим вначале понятие *инфинума*. Пусть  $Y = \{y\} \subset \mathbb{R}^1$  – некоторое числовое множество. Число  $c$  называется *инфинумом* множества  $Y$ ,  $c = \inf Y$ , когда выполняются следующие условия:

1)  $c$  не превосходит элементов множества  $Y$ :  $\forall y \in Y : c \leq y$ ;

2) при увеличим  $c$  на некоторое сколь угодно малое  $\varepsilon$ , новое число  $(c+\varepsilon)$  этим свойством обладать уже не будет:  $\forall \varepsilon > 0 \exists y \in Y : y < c + \varepsilon$

Инфинум множества еще называют *точной нижней гранью* этого множества.

Пусть мера  $\mu$  задана на некоторой  $\sigma$ -алгебре  $A$ . Внешней мерой множества  $B$  (конечно,  $B \subset X$ ) называется число, равное

$$\mu^*(B) = \inf_{\substack{A \in A \\ B \subset A}} \mu(A)$$

Заметим, что для каждого элементарного множества  $A$  его мера  $\mu(A)$  – неотрицательное число, так что множество мер  $\mu(A)$  – это числовое множество, и у него обязательно существует инфинум. Кроме того, этот инфинум конечен, потому что он заведомо неотрицателен. Можно доказать, что если исходная мера  $\mu$  была  $\sigma$ -аддитивна на  $\sigma$ -алгебре  $A$ , то и внешняя мера  $\mu^*$  будет  $\sigma$ -аддитивна, уже на множестве всех подмножеств из  $X$ . Таким образом, внешняя меры  $\mu^*$  обладает свойствами меры, что и оправдывает ее название.

Находя внешнюю меру множества  $B$ , мы не знаем, насколько точно нам удалось ее оценить: вдруг у нас просто не нашлось достаточно близких к нему элементарных

множеств (см. рис. 1)? Поэтому необходимо выделить класс множеств, у которых внешняя мера позволяет оценить «настоящую» меру достаточно точно.

Множество  $B$  называется *измеримым* (в смысле Лебега) если для любого, сколь угодно малого  $\varepsilon > 0$  найдется такое элементарное множество  $A \in A$ , что

$$\mu^*(A \Delta B) < \varepsilon$$

Функция  $\mu^*$ , рассматриваемая только на измеримых множествах, называется *лебеговой мерой*.

Введенное определение измеримости означает, что множество измеримо, если его можно «сколь угодно точно приблизить» элементарными множествами.

Таким образом, мы определили некоторый класс  $M_E$  множеств, называемых измеримыми, и функцию  $\mu$ , меру Лебега, на этом классе. Приведем ряд утверждений, выясняющих основные *свойства измеримых множеств*. Доказательства ниже представленных теорем приводятся в [15].

Теорема 1. Дополнение измеримого множества измеримо.

Теорема 2. Сумма и пересечение конечного числа измеримых множеств суть измеримые множества.

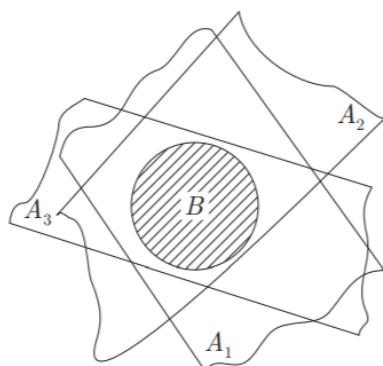


Рис. 1

Следствие. Разность и симметрическая разность двух измеримых множеств измеримы.

Теорема 3. Если  $A_1, \dots, A_n$  попарно непересекающиеся измеримые множества, то

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k).$$

Теорема 4. Сумма и пересечение счетного числа измеримых множеств суть измеримые множества.

Теорема 5. Если  $\{A_n\}$  – последовательность попарно непересекающихся измеримых множеств и  $A = \bigcup_n A_n$ , то  $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$ .

Теорема 6. Если  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$  – последовательность вложенных друг в друга измеримых множеств и  $A = \bigcap_n A_n$ , то  $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ .

Отметим в заключение еще одно очевидное, но важное обстоятельство. *Всякое множество  $A$ , внешняя мера которого равна 0, измеримо.* Достаточно положить  $B = \emptyset$ ; тогда  $\mu^*(A \Delta B) = \mu^*(A \Delta \emptyset) = \mu^*(A) = 0 < \varepsilon$

Установленные выше теоремы позволяют составить следующее представление о совокупности измеримых по Лебегу множеств.

Всякое открытое множество, принадлежащее  $E$ , можно представить как объединение конечного или счетного числа открытых прямоугольников, т. е. измеримых множеств, и в силу теоремы 4 все открытые множества измеримы. Замкнутые множества суть дополнения открытых, следовательно, они тоже измеримы. Согласно теореме 4 измеримыми должны быть и все те множества, которые могут быть получены из открытых и замкнутых с помощью конечного или счетного числа операций взятия счетных сумм и пересечений.

*Интеграл Лебега.* Понятие интеграла Римана охватывало класс функций, либо строго непрерывных в рассматриваемой области, либо близких к непрерывным (множество точек разрыва которых имеет равный нуль п-мерный объем). Этого понятияказалось недостаточно в ряде фундаментальных разделов современной математике. Понятие *интеграла Лебега* охватывает более широкий класс функций. При составлении лебеговской интегральной суммы точки объединяются в отдельные слагаемые не по принципу близости этих точек в области интегрирования (как в случае интеграла Римана), а по принципу близости в этих точках значений интегрируемой функции. Теория интеграла Лебега включает *теорию меры и измеримых функций*.

Введем понятие *измеримой функции*. Функция  $f(x)$ , определенная на измеримом множестве  $E$ , называется измеримой на этом множестве, если для любого вещественного числа  $a$  множество  $E[f \geq a]$  измеримо.

Теорема. Для измеримости функции  $f(x)$  на множестве  $E$  необходимо и достаточно, чтобы одно из следующих трех множеств

$$E[f > a], E[f < a], E[f \leq a]$$

было измеримо при любом вещественном  $a$ .

Свойства измеримых функций.

1. Если функция  $f(x)$  измерима на множестве  $E$ , то она измерима и на любой измеримой части  $E_1$  множества  $E$ .

2. Если множество  $E$  представляет собой конечную или счетную сумму измеримых множеств  $E_n$  и если функция  $f(x)$  измерима на каждом множестве  $E_n$ , то  $f(x)$  измерима и на множестве  $E$ .

3. Любая функция  $f(x)$  измерима и на множестве  $E$  меры нуль.

4. Если функции  $f(x)$  и  $g(x)$  эквивалентны на множестве  $E$  и функции  $f(x)$  измерима на  $E$ , то и функция  $g(x)$  измерима на  $E$ .

**Определение.** Две определенные на измеримом множестве  $E$  функции  $f(x)$  и  $g(x)$  называются эквивалентными на этом множестве, если множество  $E[f \neq g]$  имеет меру равную нуль.

**Следствие.** Если функция  $f(x)$  непрерывна почти всюду на измеримом множестве  $E$ , то  $f(x)$  измерима на  $E$ .

*Интеграл Лебега на множестве конечной меры.* Будем рассматривать некоторую полную  $\sigma$ -аддитивную меру  $\mu$ , определенную на  $\sigma$ -алгебре множеств с единицей  $X$ . Все рассматриваемые множества  $A \subset X$  будут предполагаться измеримыми, а функции  $f(x)$  – определенными для  $x \in X$  и измеримыми.

**Определение.** Назовём функцию  $f$  интегрируемой (суммируемой) на множестве  $A$ , если существует последовательность простых интегрируемых на  $A$  функций  $\{f_n\}$ , сходящаяся равномерно к  $f$ . Интегралом Лебега функции  $f$  на множестве  $A$  называется предел интегралов от функций  $\{f_n\}$ :

$$\int_A f(x) d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_A f_n(x) d\mu.$$

*Основные свойства интеграла Лебега.*

1)  $\int_A 1 \cdot d\mu = \mu(A)$ .

2) Для любого постоянного  $k$ :  $\int_A kf(x) d\mu = k \int_A f(x) d\mu$ , причем из существования интеграла в правой части вытекает существование интеграла в левой.

3) Аддитивность:  $\int_A [f(x) + g(x)] d\mu = \int_A f(x) d\mu + \int_A g(x) d\mu$ , причем из существования интегралов в правой части вытекает существование интеграла в левой.

4) Ограниченнная на множестве  $A$  функция  $f$  интегрируема на  $A$ .

5) Монотонность: если  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_A f(x) d\mu \geq 0$  (в предположении, что интеграл существует).

6) Если  $\mu(A) = 0$ , то  $\int_A f(x) d\mu = 0$ .

7) Если  $f(x) = g(x)$  почти всюду, то  $\int_A f(x) d\mu = \int_A g(x) d\mu$ , причем оба интеграла существуют или не существуют одновременно.

8) Если функция  $\varphi$  интегрируема на  $A$  и почти всюду  $|f(x)| \leq \varphi(x)$ , то  $f$  также интегрируема на  $A$ .

9) Интегралы  $I_1 = \int_A f(x) d\mu, I_2 = \int_A |f(x)| d\mu$  существуют или не существуют одновременно.

## Метрические и нормированные пространства.

*Метрические пространства. Определения и примеры.* Метрическим пространством называется пара  $(X, \rho)$ , состоящая из некоторого множества (пространства)  $X$  элементов (точек) и расстояния, т.е. однозначной, неотрицательной, действительной функции  $\rho(x, y)$ , определенной для любых  $x$  и  $y$  из  $X$  и подчиненной следующим трем аксиомам:

- 1)  $\rho(x, y) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = y$  (аксиома тождества),
- 2)  $\rho(x, y) = \rho(y, x)$  (аксиома симметрии),
- 3)  $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$  (аксиома треугольника).

Число  $\rho(x, y)$  называется *расстоянием (или метрикой)* между элементами  $x$  и  $y$  пространства  $X$ . Само метрическое пространство, т.е. пару  $(X, \rho)$  будем обозначать как  $R = (X, \rho)$ .

Примеры метрических пространств.

1. Множество действительных чисел с расстоянием  $\rho(x, y) = |x - y|$  образует метрическое пространство  $R^1$ .

2. Множество упорядоченных групп из  $n$  действительных чисел  $x = (x_1, \dots, x_n)$  с расстоянием  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^n (y_k - x_k)^2}$  называется *n-мерным арифметическим евклидовым пространством  $R^n$* .

3. Множество  $C[a, b]$  всех непрерывных действительных функций, определенных на сегменте  $[a, b]$ , с расстоянием  $\rho(f, g) = \max_{a \leq t \leq b} |g(t) - f(t)|$  также образует метрическое пространство.

4. Обозначим через  $l_2$  метрическое пространство, точками которого служат всевозможные последовательности  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  действительных чисел, удовлетворяющих условию  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty$ , а расстояние определяется формулой  $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (y_k - x_k)^2}$ .

5. Обозначим через  $l_p$  метрическое пространство, точками которого служат всевозможные последовательности  $x = (x_1, \dots, x_n, \dots)$  действительных чисел, удовлетворяющих условию  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^p < \infty$ , где  $p \geq 1$  – некоторое фиксированное число, а расстояние определяется формулой  $\rho(x, y) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k|^p \right)^{1/p}$ .

Рассмотрим важнейшие определения в метрическом пространстве – открытые и замкнутые множества, полные метрические пространства. Введем понятие предельной и

внутренней точки. Точка  $x \in R$  называется предельной точкой множества  $M \subset R$ , если любая ее окрестность содержит бесконечно много точек из  $M$ . Точка  $x$  называется внутренней точкой множества  $M$ , если существует окрестность  $O_\varepsilon(x)$  этой точки, целиком содержащаяся в  $M$ .

Множество  $M$ , лежащее в метрическом пространстве  $R$ , называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки. Например, всякий отрезок  $[a,b]$  числовой прямой есть замкнутое множество. Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым*. Например, интервал  $(a,b)$  числовой прямой  $R^1$  есть открытое множество.

Последовательность  $\{x_n\}$  точек метрического пространства будем называть фундаментальной, если она удовлетворяет следующему критерию: для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_\varepsilon$ , что  $\rho(x_n, x_{n'}) < \varepsilon$  для всех  $n' > N_\varepsilon, n'' > N_\varepsilon$ . Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна.

Если в пространстве  $R$  любая фундаментальная последовательность сходится, то это пространство называется *полным*. Все примеры метрических пространств, рассмотренных выше, являются полными.

*Нормированные пространства. Определение и примеры.* Пусть  $L$  – линейное пространство. *Нормой* в  $L$  называется функционал, удовлетворяющий следующим трем условиям:

- 1)  $p(x) \geq 0$ , причем  $p(x) = 0$  только при  $x = 0$ ,
- 2)  $p(x+y) \leq p(x) + p(y), x, y \in L$ ,
- 3)  $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ , каково бы ни было число  $\alpha$ .

Линейное пространство  $L$ , в котором задана некоторая норма, называется *нормированным пространством*. Норму элемента  $x \in L$  обозначают символом  $\|x\|$ .

Всякое нормированное пространство становится метрическим пространством, если ввести в нем расстояние  $\rho(x, y) = \|x - y\|$ . Таким образом, на нормированные пространства переносятся все те понятия и факты, которые справедливы для метрических пространств.

Многие из метрических пространств, рассмотренных выше, в действительности могут быть наделены естественной структурой нормированного пространства.

1. Прямая линия  $R$  становится нормированным пространством, если для всякого числа  $x \in R$  положить  $\|x\| = |x|$ .

2. Если в действительном  $n$ -мерном пространстве  $R^n$  с элементами  $x = (x_1, \dots, x_n)$  положить  $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}$ , то все аксиомы нормы будут выполнены, а формула  $\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}$  определяет в  $R^n$  метрику.

3. В пространстве  $C[a,b]$  непрерывных функций на отрезке  $[a,b]$  определим норму формулой  $\|f\| = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|$ .

Важным классом нормированных пространств являются евклидовы пространства.

*Скалярным произведением* в действительном линейном пространстве  $R$  называется действительная функция  $(x, y)$ , определенная для каждой пары элементов  $x, y \in R$  и удовлетворяющая следующим условиям:

- 1)  $(x, y) = (y, x),$
- 2)  $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y), ,$
- 3)  $(\lambda x, y) = \lambda(x, y),$
- 4)  $(x, x) \geq 0,$  причем  $(x, x) = 0$  только при  $x = 0.$

Линейное пространство с фиксированным в нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. В евклидовом пространстве  $R$  вводится норма в виде:  $\|x\| = \sqrt{(x, x)}$ .

Важным понятием в евклидовом пространстве является ортогональность векторов. Векторы  $x$  и  $y \in R$  называют *ортогональными*, если их скалярное произведение  $(x, y) = 0.$

Система ненулевых векторов  $\{x_\alpha\}$  из  $R$  называется ортогональной, если  $(x_\alpha, y_\beta) = 0$  при  $\alpha \neq \beta.$  Если векторы  $\{x_\alpha\}$  ортогональны, то они линейно независимы.

Если ортогональная система  $\{x_\alpha\}$  полна, то она называется *ортогональным базисом*. Если при этом норма каждого элемента равна 1, то система  $\{x_\alpha\}$  называется *ортогональным нормированным базисом* (ортонормированным базисом).

Полное евклидово пространство бесконечного числа измерений называется *гильбертовым пространством*  $H.$  Примером гильбертова пространства служит действительное пространство  $l^2$  – множество, элементами которого являются всевозможные последовательности вещественных чисел  $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  такие что ряд составленный из квадратов этих чисел является сходящимся  $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < \infty.$  Как и в

евклидовом пространстве в пространстве  $l^2$  введены операции сложения и умножения элементов на вещественные числа, а скалярное произведение определяется как  $(x_k, y_k) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k.$  Норма элемента  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$  в пространстве  $l^2$  определяется как

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2}.$$

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Мера и ее свойства. Лебегова мера.
2. Измеримые множества. Измеримые функции.
3. Интеграл Лебега. Отличия интеграла Римана и интеграла Лебега.
4. Метрические пространства.

5. Норма и нормированные пространства.
6. Евклидово пространство. Пространство  $L^2$ .

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [15]; [17].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Пространства интегрируемых функций.
2. Линейные непрерывные функционалы. Линейные операторы.
3. Элементы спектральной теории.
4. Дифференциальные и интегральные операторы.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [15]; [17].

*Тема:* «Численные методы и их применение в научных исследованиях»

*Основные понятия темы:* прямое и обратное преобразование Лапласа, прямое и обратное преобразование Фурье, конструкции вейвлет-преобразования, вейвлет-базис.

### **Материалы лекций**

#### *Преобразования Фурье, Лапласа*

*Преобразование Лапласа.* Рассмотрим функцию  $f(x)$  вещественной переменной  $x$ .

Будем считать, что на эту функцию наложены следующие ограничения:

1.  $f(x) = 0$  при  $x < 0$ ;
2. существуют такие постоянные  $M$  и  $s_0$ , что  $|f(x)| \leq M e^{s_0 x}$ .

Преобразованием Лапласа от функции  $f(x)$  называется функция

$$F(p) = \int_0^\infty f(x) e^{-px} dx$$

от комплексной переменной  $p = s + i\sigma$ .

Саму функцию  $f(x)$  часто называют оригиналом, а функцию  $F(p)$  – ее изображением. С помощью интеграла Лапласа устанавливается соответствие между функцией  $f(x)$  и ее изображением  $F(p)$ . Для перехода от изображения  $F(p)$  к ему соответствующему оригиналу  $f(x)$  необходимо выполнить *обратное преобразование Лапласа (формула обращения)*:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(p) e^{px} dp$$

*Свойства преобразования Лапласа.* В приводимых ниже формулах  $F(p)$  и  $G(p)$  являются преобразованиями Лапласа от функций  $f(x)$  и  $g(x)$  соответственно.

1. Линейность:  $\alpha f(x) \pm \beta g(x) \Leftrightarrow \alpha F(p) \pm \beta G(p)$ .
2. Теорема подобия:  $f(\alpha x) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
3. Дифференцирование оригинала:  $f^{(n)}(x) \Leftrightarrow p^n F(p) - p^{n-1} f'(0) - p^{n-2} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$ .

Данное свойство позволяет операцию дифференцирования оригинала  $f(x)$  заменить операцией умножения изображения на  $p$ , что сильно упрощает решение задач, где есть производные.

4. Дифференцирование изображения:  $F^{(n)}(p) \Leftrightarrow (-1)^n x^n f(x)$ .

5. Интегрирование оригинала:  $\int_0^x f(t)dt \Leftrightarrow \frac{F(p)}{p}$ . Данное свойство позволяет

заменить сложную операцию интегрирования оригинала операцией деления изображения на  $p$ .

6. Интегрирование изображения:  $\frac{f(x)}{x} \Leftrightarrow \int_p^\infty F(p)dp$

7. Теорема запаздывания:  $f(x-\tau) \Leftrightarrow e^{-p\tau} F(p)$

8. Теорема смещения  $e^{p_0 x} f(x) \Leftrightarrow F(p - p_0)$

9. Теорема умножения:  $F(p)G(p) \Leftrightarrow \int_0^x f(t)g(x-t)dt$ . Комбинация  $\int_0^x f(t)g(x-t)dt$  называется *сверткой* функций  $f(x)$  и  $g(x)$ . Преобразование Лапласа позволяет заменить операцию свертки двух оригиналов операцией умножения их изображений.

10. Предельные соотношения:  $\lim_{p \rightarrow \infty} pF(x) = f(0); \lim_{p \rightarrow 0} pF(p) = f(+\infty)$ .

*Преобразование Фурье.* Кроме преобразования Лапласа, широкое применение находит также еще одно интегральное преобразование, которое носит название преобразования Фурье.

Пусть  $f(x)$  есть функция вещественной переменной  $x$ , определенная на всей прямой  $-\infty < x < +\infty$ . Основное ограничение, накладываемое на эту функцию, имеет вид

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|dx < +\infty$$

то есть эта функция абсолютно интегрируема на всей числовой оси. Кроме этого, требуется, чтобы  $f(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Преобразованием Фурье  $F(\omega)$  от функции  $f(x)$  называется функция

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{i\omega x} dx$$

Она существует при любых  $\omega$ .

Как и в случае преобразования Лапласа оказывается, что не только  $F(\omega)$  однозначно определяется функцией  $f(x)$ , но и наоборот,  $f(x)$  однозначно определяется  $F(\omega)$ , то есть имеется взаимно однозначное соответствие  $f(x) \Leftrightarrow F(\omega)$ . Это соответствие дается формулой обращения, которая носит название обратного преобразования Фурье и имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{-i\omega x} d\omega$$

Преобразование Фурье обладает теми же свойства, что и преобразование Лапласа,

## Вейвлет-преобразование

Существует несколько конструкций вейвлет-преобразования: непрерывное вейвлет-преобразование, дискретное вейвлет-преобразование, кратномасштабные аппроксимации и вейвлет-пакеты. Более детальный анализ сигнала позволяет выполнить непрерывное вейвлет-преобразование.

*Непрерывное вейвлет-преобразование* раскладывает сигналы по растянутым и сдвинутым вейвлетам  $\Psi$ . Так как вейвлет  $\Psi$  имеет нулевое среднее значение, то вейвлет-преобразование

$$Wf(a,b) = \int f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (1)$$

измеряет изменение  $f$  в окрестности точки  $b$ , размер окрестности пропорционален  $a$ . При стремлении масштаба  $a$  к нулю вейвлет-коэффициенты характеризуют свойства функции  $f$  в окрестности точки  $b$ .

Функцию  $\Psi \in L^2(R)$ , удовлетворяющую условию:

$$C_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(w)|^2}{|w|} dw < \infty, \quad (2)$$

где  $\hat{\Psi}$  – преобразование Фурье функции  $\Psi$ , называют «базисным вейвлетом». Относительно каждого базисного вейвлета  $\Psi$  непрерывное вейвлет-преобразование на  $L^2(R)$  определяется формулой

$$(W_\Psi f)(b,a) := |a|^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt, \quad f \in L^2(R), a, b \in R, a \neq 0. \quad (3)$$

Если  $\hat{\Psi}$  – непрерывная функция, то из равенства (2) следует, что  $\hat{\Psi}(0) = 0$ , или, что эквивалентно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi(t) dt = 0.$$

Непрерывное вейвлет-преобразование – может быть записано в виде скалярного произведения в пространстве  $L^2(R)$ :

$$(W_\Psi f)(b,a) = \langle f, \Psi_{b,a} \rangle, \quad \text{где } \Psi_{b,a}(t) := |a|^{-1/2} \Psi\left(\frac{t-b}{a}\right).$$

Таким образом, вейвлет – это функция с нулевым средним значением, с параметром масштаба  $a$  и с параметром сдвига  $b$  (рис. 1). Масштабный параметр  $a$  обратно пропорционален частоте. В анализе сигналов рассматриваются только положительные значения  $a$ , поэтому, восстанавливая  $f$ , мы можем использовать только значения  $(W_\Psi f)(b,a)$ , где  $a > 0$ . В этом случае на базисный вейвлет  $\Psi$  накладываются дополнительные ограничения:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(\omega)|^2}{w} dw = \int_0^{\infty} \frac{|\hat{\Psi}(-\omega)|^2}{w} dw = \frac{1}{2} C_\Psi < \infty$$

тогда для любой  $f \in L^2(R)$

$$f(x) = \frac{2}{C_\Psi} \int_0^\infty \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} (W_\Psi f)(b, a) \Psi_{b,a}(x) db \right] \frac{da}{a^2}.$$

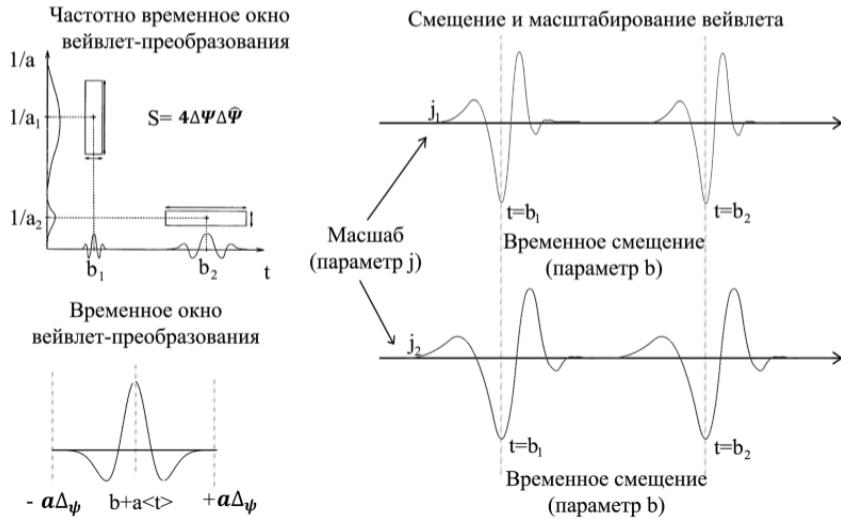


Рис. 1 – Смещение и масштабирование вейвлета

В качестве примера на рис. 2 показан пример непрерывного вейвлет-преобразования геомагнитного сигнала. Анализ рис. 2 показывает, что геомагнитный сигнал имеет сложную, нестационарную структуру, в которой в случайные моменты времени возникают локальные особенности различной длительности и формы. На рис. 2 б по оси оу отложены масштабы, а цветом отмечены значения вейвлет коэффициентов (большие значения – черным цветом, маленькие – белым).

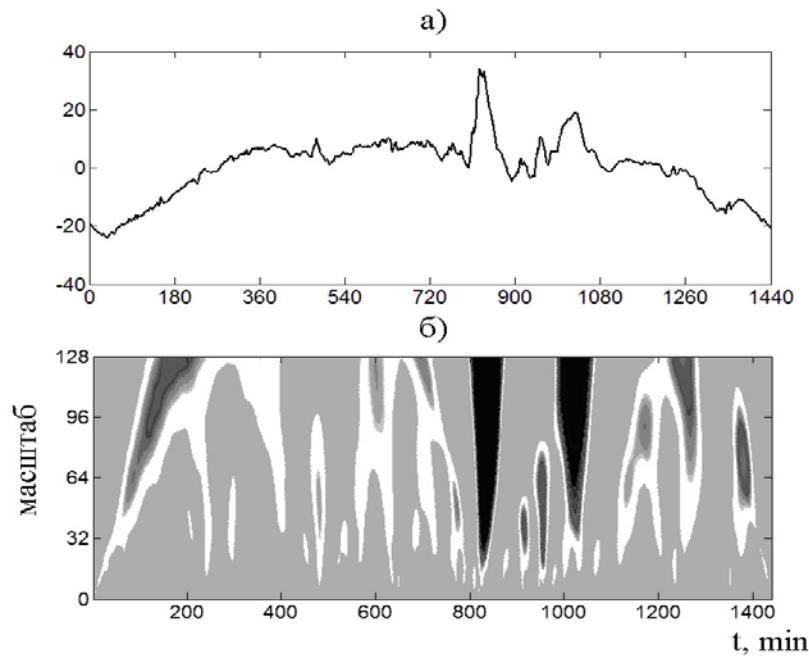


Рис. 2 – Непрерывного вейвлет-преобразования геомагнитного сигнала а) геомагнитный сигнал; б) непрерывное вейвлет-преобразование

*Дискретное вейвлет-преобразование.* В том случае, когда существуют положительные константы А, В, такие что

$$A\|f\|_2^2 \leq \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} |\langle f, \Psi_{b_0;j,k} \rangle|^2 \leq B\|f\|_2^2, \quad (4)$$

$$f \in L^2(R), \text{ где } \Psi_{b_0;j,k}(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - kb_0)$$

говорят, что функция  $\Psi \in L^2(R)$  порождает каркас  $\{\Psi_{b_0;j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$  с нормой выборки  $b_0 > 0$ . Константы А, В называют границами каркаса. Если А=В, то каркас называют жестким каркасом. Условие (4) называют условием «устойчивости» для восстановления  $f \in L^2(R)$  по ее дискретным значениям непрерывного вейвлет-преобразования:

$$f = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \langle f, \Psi_{b_0;j,k} \rangle \Psi_{b_0}^{j,k}$$

$$\{\Psi_{b_0}^{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$$
 называют двойственным каркасом  $\{\Psi_{b_0;j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ .

Следует заметить, что каркас может и не образовать линейно независимого семейства. Более сильным требованием является требование, чтобы  $\Psi$  порождала базис Рисса, т.е. линейная оболочка  $\{\Psi_{b_0;j,k} \mid j, k \in \mathbb{Z}\}$  плотна в  $L^2(R)$  и  $\exists A, B, 0 < A \leq B < \infty$ :

$$A\left\|\left\{c_{j,k}\right\}\right\|_{l^2}^2 \leq \left\|\sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Psi_{b_0;j,k}\right\|_2^2 \leq B\left\|\left\{c_{j,k}\right\}\right\|_{l^2}^2$$

$$\text{для всех } \left\{c_{j,k}\right\} \in l^2(\mathbb{Z}^2)$$

Существует два очень важных подкласса R-функций, ими являются полуортогональные вейвлеты (п.о.) и более узкий подкласс ортогональных вейвлетов (о.н.). Для этих двух классов функций весьма легко описать их двойственные.

Для ортогональных вейвлетов

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,m} \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

для полуортогональных

$$\langle \Psi_{j,k}, \Psi_{l,m} \rangle = 0, \quad j \neq l, \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z}$$

о.н. вейвлет является двойственным самому себе, т.е.

$$\Psi^{j,k} = \Psi_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

Если  $\Psi$  - вейвлет с двойственным  $\tilde{\Psi}$ , то каждая  $f \in L^2(R)$  может быть записана как

$$f(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} \Psi_{j,k}(x) = \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} d_{j,k} \tilde{\Psi}_{j,k}(x) \quad (5)$$

$$c_{j,k} = \langle f, \tilde{\Psi}_{j,k} \rangle,$$

$$d_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle.$$

Эти бесконечные ряды называются вейвлет-рядами и сходятся в  $L^2(R)$ . Преобразование (5) называется *дискретным вейвлет-преобразованием*. На рис. 3 представлен пример масштабирования и сдвига вейвлета.

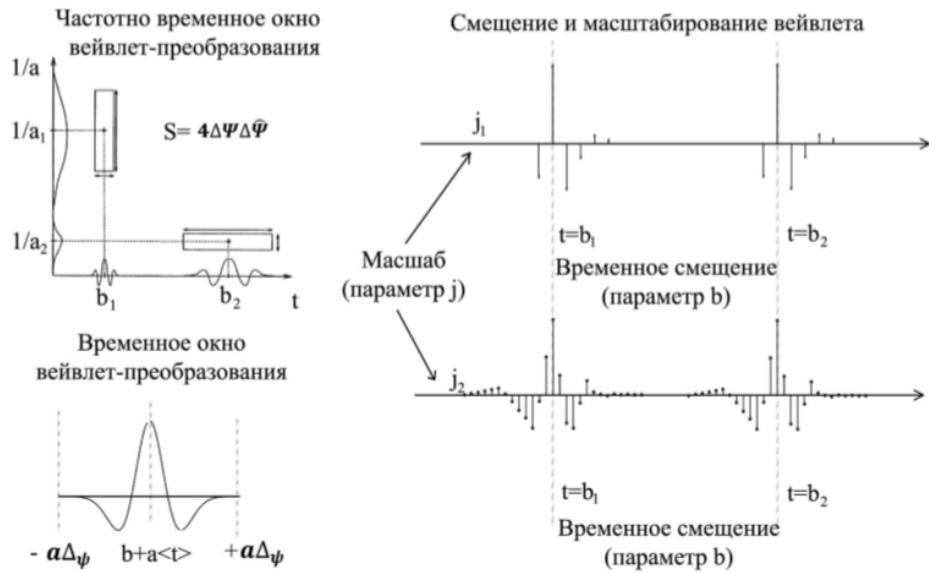


Рис. 3 – Смещение и масштабирование вейвлета

*Выбор аппроксимирующего вейвлета.* Вейвлет-преобразование предоставляет широкий выбор базисных функций. Решая задачу выбора аппроксимирующей базисной вейвлет-функции в качестве основных критериев логично определить следующие.

1) *Ортогональность вейвлет-базиса.* В случае обработки дискретных данных необходимо учитывать следующий факт: *устойчивые для восстановления функции по ее дискретным значениям вейвлет-преобразования обеспечивают базисы, образующие каркас.* Выше сказано, что существует два подкласса вейвлетов – *полуортогональные вейвлеты* и более узкий подкласс *ортогональных вейвлетов*. Но *ортогональный вейвлет* является двойственным самому себе, в отличие от полуортогонального, в случае которого в вейвлет-преобразовании используются две функции – одна в процедуре разложения, другая – в процедуре восстановления. Эти функции обладают разными свойствами (имеют разное число нулевых моментов, разные размеры носителей и др.) и позволяют получить разные результаты преобразования. Поэтому необходимо выбирать, какую из этих функций использовать в процедуре разложения, а какую – в процедуре восстановления.

2) *Число нулевых моментов и гладкость вейвлета.*

Вейвлет  $\Psi$  имеет  $l$  нулевых моментов, т.е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \Psi(t) dt = 0, k = \bar{0}, \bar{l}-1 .$$

Число нулевых моментов  $l$  характеризует способность вейвлета выявлять особенность вида  $\alpha \leq l$ . Также из этого свойства следует, что вейвлет  $\Psi$  ортогонален любому многочлену степени  $(l-1)$ , т.е. «пропускает» полиномы степени выше  $(l-1)$ . Поэтому в окрестностях, где функция гладкая, большее число нулевых моментов вейвлета обеспечит большее число пренебрежимо малых коэффициентов  $d_{\eta,n} = \langle f, \Psi_{\eta,n} \rangle$ . В этом случае мы получаем с минимальным числом слагаемых при заданном уровне точности аппроксимации.

Аналогично числу нулевых моментов, гладкость вейвлета характеризует его способность выделять особенность вида  $\alpha \leq l$ .

### 3) Размер носителя вейвлета.

Вейвлет-преобразование порождает искусственные “скачки” на краях аппроксимируемого временного ряда, находящие отражения в коэффициентах разложения. Поскольку размер окрестности на масштабе  $\eta$ , содержащей краевой эффект, зависит от размера носителя вейвлет-функции  $\Psi$  и определяется по формуле

$$h_\eta = 2^\eta * q, \quad q - \text{размер носителя вейвлета},$$

получаем, *чем меньше размер носителя  $q$ , тем меньшую погрешность аппроксимации мы получаем.*

Если  $f$  имеет локальную особенность в некоторой точке  $V$  и точка  $V$  находится внутри носителя вейвлета, то вейвлет-коэффициенты имеют большую амплитуду. Чем больше носитель, тем большее число таких коэффициентов на каждом масштабном уровне мы получаем. Чтобы минимизировать их число, мы должны использовать вейвлет с наименьшим размером носителя.

Проанализируем свойства 2) – 3). Известным фактом является то, что число нулевых моментов и гладкость вейвлета связаны друг с другом, но характер связи может быть различным в зависимости от вида рассматриваемого семейства вейвлетов. В работах И. Добеши показано, что, например, для вейвлетов семейства Добеши характерно следующее свойство: гладкость вейвлета возрастает с возрастанием числа нулевых моментов. В своих работах И. Добеши доказала, что если вейвлет  $\Psi$  имеет  $l$  нулевых моментов, то его наименьший носитель равен  $2l-1$ . Поэтому можно рекомендовать: если функция имеет несколько локальных особенностей и очень гладкая

между этими особенностями, необходимо использовать вейвлет с большим числом нулевых моментов; если число особенностей нарастает, лучше уменьшить размер носителя ценой уменьшения числа нулевых моментов. Также важно отметить, что *вейвлеты семейства Добеши – это единственное семейство ортогональных вейвлетов с компактными носителями, которые имеют минимальный размер носителя при заданном числе нулевых моментов.*

### Численные методы вейвлет-анализа

*Кратномасштабные разложения.* Кратномасштабные аппроксимации определяют через последовательность замкнутых подпространств  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$  из  $L^2(R)$ , удовлетворяющих следующим шести свойствам:

1.  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2 f(t) \in V_j \Leftrightarrow f(t - 2^j k) \in V_j$ ,
2.  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2 V_{j+1} \subset V_j$ ,
3.  $\forall (j, k) \in \mathbb{Z}^2 f(t) \in V_j \Leftrightarrow f\left(\frac{t}{2}\right) \in V_{j+1}$ ,
4.  $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j = \{0\}$ ,
5.  $\lim_{j \rightarrow +\infty} V_j = \text{замыкание } \left( \bigcap_{j=-\infty}^{+\infty} V_j \right) = L^2(R)$ , существует функция  $\theta$  такая, что

семейство  $\{\theta(t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  есть базис Рисса  $V_0$ .

Кратномасштабные приближения вычисляют аппроксимацию сигналов с различными разрешениями с помощью проекции на разные пространства  $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ . Приближение функции  $f$  с разрешением  $2^{-j}$  определяется дискретной решеткой отчетов, которая обеспечивает локальные средние  $f$  в окрестностях, пропорциональных  $2^j$ . Поэтому кратномасштабная аппроксимация состоит из набора решеток аппроксимации. Более формально приближение функции с разрешением  $2^{-j}$  определяется как ортогональная проекция на пространство  $V_j \subset L^2(R)$ . Ортогональная проекция  $f$  есть функция  $f_j \in V_j$ , которая минимизирует  $\|f - f_j\|$ .

Кратномасштабная конструкция используется для обработки дискретных данных. В этом случае, имея дискретные значения функции  $f_j$  (т.е. значения функции на сетке с разрешением  $2^{-j}$ ), в качестве пространства выборки рассматривают подпространство масштаба  $j$

$$V_j = \text{clos}_{L^2(R)}(\phi(2^j t - n)),$$

где функция  $\phi$ , порождающая подпространства  $V_j$  своими сдвигами и растяжениями, называется масштабирующей функцией. Она играет особую роль в конструкции кратномасштабного анализа. От свойств этой функции зависят такие важные свойства вейвлета  $\Psi$  как величина носителя и гладкость.

Полагая, что  $j=0$ , т.е. пространство исходного дискретного сигнала  $f_j(t_n)$  есть  $V_0 = clos_{L^2(R)}(\phi(2^0 t - n)), n \in Z$ , используя разложение получаем его отображение в пространства  $V_{-1}$  и  $W_{-1}$ :

$$V_0 = V_{-1} \oplus W_{-1}.$$

где  $\oplus$  - ортогональная сумма.

Сигнал будет иметь представление

$$f_0(t) = g_{-1}(t) + f_{-1}(t).$$

Ортогональная проекция сигнала  $f_0(t)$  на подпространство  $V_{-1}$  дает на компоненту  $f_{-1}(t)$ , которая задается скалярных произведений  $f_0(t)$  с функциями из ортонормированного базиса  $V_{-1}$ , т.е. величинами

$$c_n^{-1} = \left\langle f_0(t), 2^{-1/2} \phi\left(\frac{1}{2} - n\right) \right\rangle = \left\langle \sum_n f_n \phi(t - n), \sum_l h_l \phi(t - l) \right\rangle = \sum_s h_s f_{2n+s}. \quad (6)$$

В качестве компоненты  $g_{-1}(t)$  рассматривают компоненту сигнала  $f_0(t)$ , ортогональную к пространству  $V_{-1}$ . Базисом пространства  $W_{-1}$  является набор вейвлет-функций  $\left\{ 2^{-1/2} \Psi\left(\frac{t}{2} - n\right) \right\}$ , где  $\Psi\left(\frac{t}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_n q_n \phi(t - n)$ . Коэффициенты  $q_n$  имеют вид  $q_n = (-1)^n h_{1-n}$ . Проекция сигнала на подпространство  $W_{-1}$  задается набором скалярных произведений  $f_0(t)$  с функциями  $\Psi$ :

$$d_n^{-1} = \left\langle f_0(t), 2^{-1/2} \Psi\left(\frac{1}{2} - n\right) \right\rangle = \sum_s q_s f_{2n+s}, \quad (7)$$

что равносильно свертке с фильтром  $q^*$  и прореживанию вдвое.

Таким образом, процедура разложения сигнала на две компоненты заключаются в выполнении двух операций свертки и прореживанию вдвое. Одна операция осуществляется с фильтром  $h^*$ , это фильтр, пропускающий низкие частоты, тем самым осуществляющий сглаживание сигнала и выделение аппроксимирующей компоненты сигнала. Этую компоненту называют так же сглаженной компонентой сигнала. Вторая операция осуществляется с фильтром  $q^*$ . Это фильтр, пропускающий высокие частоты, тем самым выделяющий высокочастотную компоненту сигнала. Этую компоненту называют так же детализирующей компонентой сигнала. Фильтры являются парой зеркальный квадратурных фильтров.

Описанная вычислительная процедура называется в вейвлет-теории алгоритмом разложения, она работает на любом масштабе и, в случае ортогональности базиса, позволяет выполнить разложение сигнала на ортогональные компоненты по схеме

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}.$$

Если эту процедуру разложения выполнить для сигнала  $f_0(t)$   $m$  раз, то получим следующую схему разложения:

$$V_0 = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \dots \oplus W_{-m} \oplus V_{-m},$$

где  $W_j, V_j$  – это есть пространства масштаба  $j$  с разрешением  $2^{-j}$ .

В результате исходный сигнал  $f_0$  будет иметь представление в виде суммы компонент:

$$f_0(t) = g_{-1}(t) + g_{-2}(t) + \dots + g_{-m}(t) + f_{-m}(t), \quad (8)$$

где  $g_j \in W_j, f_i \in V_i$ .

Каждая компонента (8) единственным образом определяется последовательностями коэффициентов  $\bar{d}^j = \{d_n^j\}_{n \in Z} \in W_j$  и  $\bar{c}^{-m} = \{c_n^{-m}\}_{n \in Z} \in V_{-m}$  (рис. 4):

$$d_n^j = \langle f, \Psi_{j,n} \rangle, c_n^{-m} = \langle f, \phi_{-m,n} \rangle.$$

Коэффициенты  $\bar{d}^j$  определяют *детализирующие компоненты* сигнала. Коэффициенты  $\bar{c}^{-m}$  соответствуют *аппроксимирующей компоненте* сигнала.

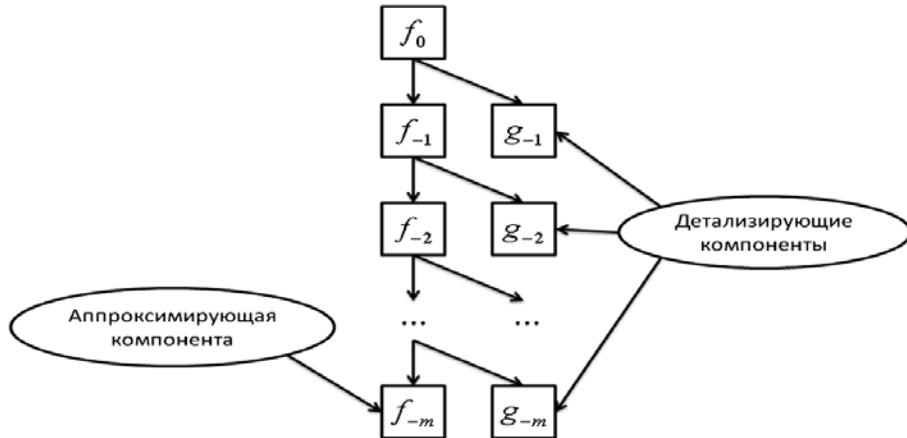


Рис. 4 – Схема представления сигнала  $f_0$  на основе конструкции кратномасштабных аппроксимаций.

На рис. 5 и рис. 6 показаны аппроксимирующие и детализирующие вейвлет-коэффициенты, соответственно рассчитанные для геомагнитного сигнала.

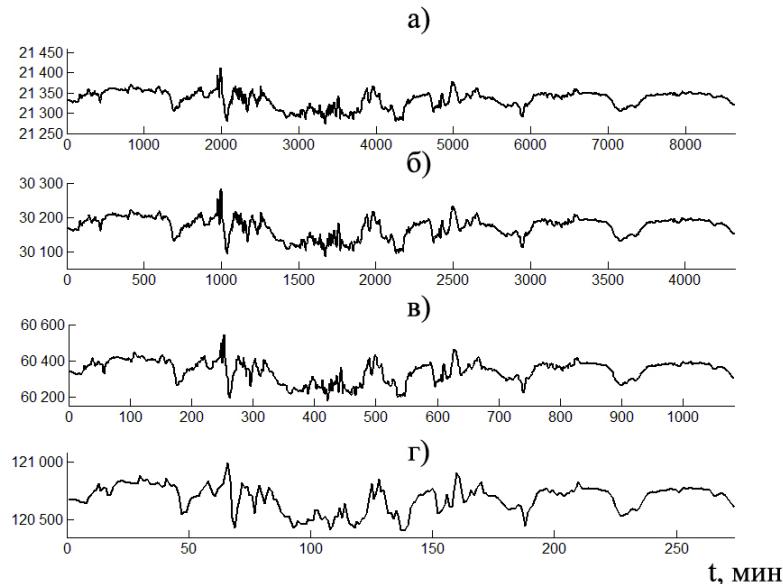


Рис. 5 – Разложение геомагнитного сигнала на основе кратномасштабных аппроксимаций а) геомагнитный сигнал; б)-г) аппроксимирующие вейвлет-коэффициенты: б) на первом уровне разложения; в) на втором уровне разложения; г) на пятом уровне разложения

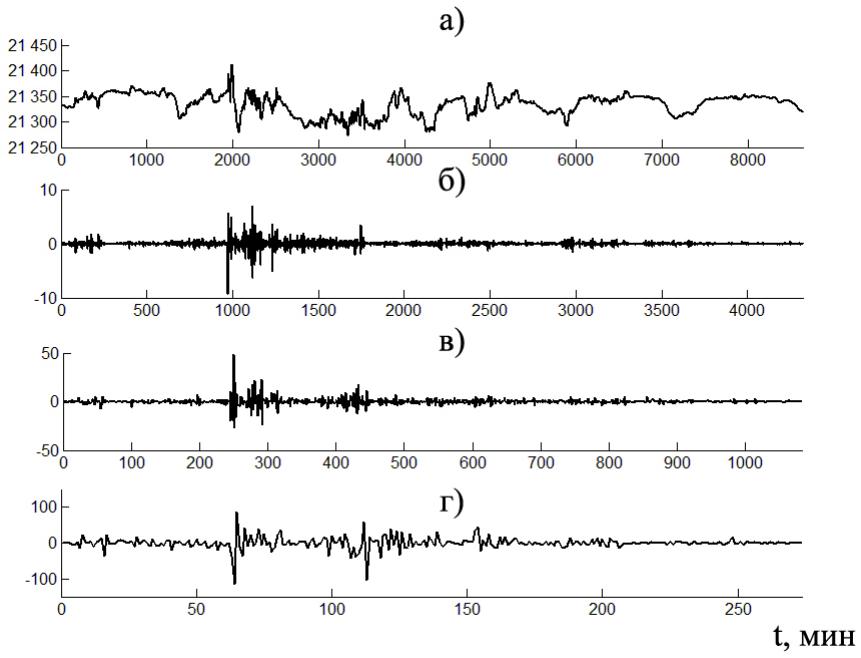


Рис. 6 – Разложение геомагнитного сигнала на основе кратномасштабных аппроксимаций: а) геомагнитный сигнал; б)-г) детализирующие вейвлет-коэффициенты: б) на первом уровне разложения; в) на втором уровне разложения; г) на пятом уровне разложения

**Вейвлет-Пакеты.** Конструкция кратномасштабных аппроксимаций построена на предположении, что полезная информация о сигнале находится в низкочастотной его составляющей. В случае необходимости идентификации различных типов частотно-временных структур более удобным методом является конструкция вейвлет-пакетов.

Ортонормированные базисы *вейвлет-пакетов* используют сопряженные зеркальные фильтры для разбиения частотной оси на отдельные интервалы различных размеров: если  $\{\theta_j(2^j t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  является ортонормированным базисом пространства  $U_j$  с разрешением  $2^{-j}$ , и  $h$ ,  $g$  – пара сопряженных зеркальных фильтров, определяемых формулами

$$\theta_{j-1}^0(t) = \sum_n h_n \theta_j(2^j t - n) \text{ и } \theta_{j-1}^1(t) = \sum_n g_n \theta_j(2^j t - n),$$

то семейство  $\{\theta_{j-1}^0(2^{j-1} t - n), \theta_{j-1}^1(2^{j-1} t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  является ортонормированным базисом  $U_j$ .

Таким образом, сопряженные зеркальные фильтры преобразуют ортогональный базис  $\{\theta_j(2^j t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  в два ортогональных семейства  $\{\theta_{j-1}^0(2^{j-1} t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  и  $\{\theta_{j-1}^1(2^{j-1} t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ . Пространства  $U_{j-1}^0$  и  $U_{j-1}^1$ , порожденные каждым из этих семейств, ортогональны и

$$U_{j-1}^0 \oplus U_{j-1}^1 = U_j.$$

Если положить  $U_j = W_j$ , то, используя приведенную выше процедуру разложения пространства на основе (6), (7) для пространства  $W_j$ , мы получаем разбиение высокочастотной компоненты сигнала. Рекурсивное расщепление пространств на основе этой процедуры представляют в виде двоичного дерева (рис. 7), которое в вейвлет-теории называют *деревом пространств вейвлет-пакетов*.

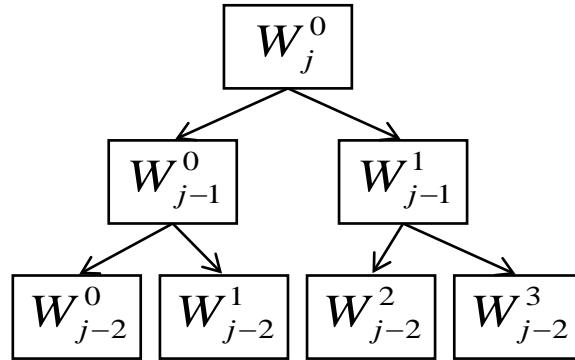


Рис. 7 – Двоичное дерево пространств вейвлет-пакетов.

С каждым узлом  $(j, p)$  двоичного дерева связывают пространство  $W_j^p$ , которое допускает ортонормированный базис  $\{\Psi_j^p(2^j t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$  при движении вниз по дереву. Каждый узел-родитель делится на два ортогональных подпространства. На корне дерева  $W_j^0 = V_j$  и  $\Psi_j^0 = \phi_j$ .

Это рекурсивное расщепление определяет двоичное дерево пространств вейвлет-пакета, где каждый узел-родитель делится на два ортогональных подпространства. Рис. 8 изображает вейвлет-пакеты  $\Psi_j^p$  на глубине  $j = 3$ , вычисленных с помощью фильтров Добеши 5-го порядка. Эти вейвлет-пакеты имеют частоты, упорядоченные слева направо.

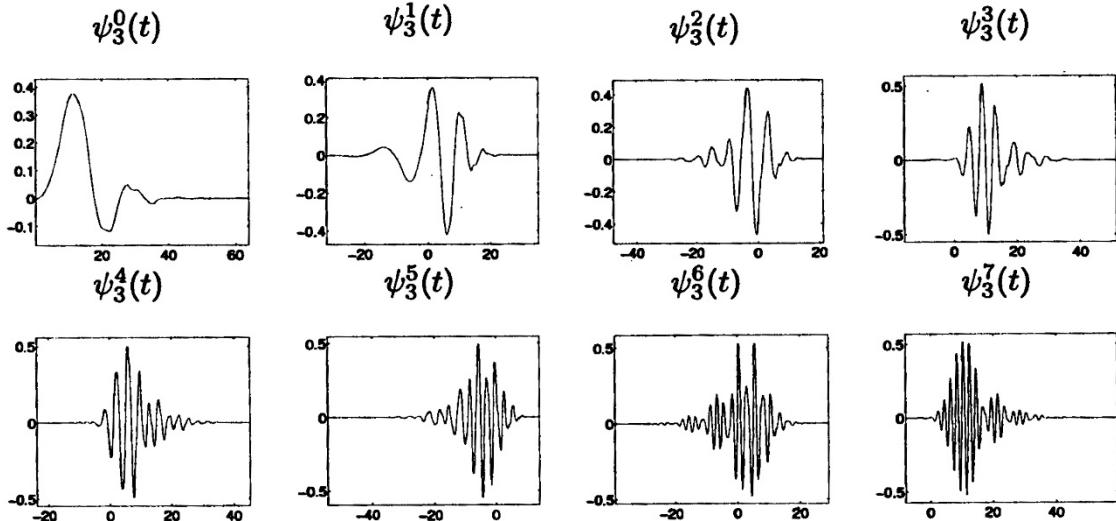


Рис. 8 – Базисы, вычисленные с помощью фильтра Добеши 5 на глубине  $j = 3$  дерева вейвлет-пакета. Базисы упорядочены от низких до высокий частот.

Применяя рекурсивное расщепление вдоль ветвей двоичного дерева, мы получаем взаимно ортогональные пространства  $\{W_{j_i}^{p_i}\}_{1 \leq i \leq I}$ , такие что

$$W_j^0 = \bigoplus_{i=1}^I W_{j_i}^{p_i}.$$

Объединение соответствующих базисов вейвлет-пакетов  $\{\Psi_{j_i}^{p_i}(2^{j_i} t - n)\}_{n \in \mathbb{Z}, 1 \leq i \leq I}$  определяет ортонормированный базис  $W_j^0 = V_j$ .

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Прямое и обратное преобразование Фурье.

2. Прямое и обратное преобразование Лапласа.
3. Конструкции вейвлет-преобразования. Особенности их применения.
4. Вейвлет-базис и критерии его выбора.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [8]; [9]; [12].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Интерполяция и аппроксимация функциональных зависимостей.
2. Численное дифференцирование и интегрирование.
3. Численные методы поиска экстремума.
4. Вычислительные методы линейной алгебры.
5. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [8]; [9]; [12].

*Тема: «Экстремальные задачи, области применения»*

*Основные понятия темы:* глобальный максимум (минимум), локальный максимум (минимум), общая задача математического программирования, линейное и нелинейное программирование, симплекс-метод.

### *Материалы лекций*

*Экстремальные задачи в евклидовых пространствах. Основные определения*

Теорию задач на отыскание минимума или максимума некоторой функции называют *теорией экстремальных задач*, или теорией оптимизации, или иногда теорией оптимального управления. Частью этой теории являются: вариационное исчисление, выпуклое программирование, динамическое программирование, дискретное программирование, линейное программирование, математическое программирование, и тп.

Постановка прикладных экстремальных задач, как правило, производится в словесной форме. Решение такой задачи требует ее *формализации* (перевод задачи на математической языке). Важность этого этапа определяется тем, что часто задача может быть формализована разными способами, и от удачного выбора способа могут существенно зависеть выбор метода и трудоемкость решения. Любая формализованная задача включает в себя следующие элементы: функционал  $f : X \rightarrow \bar{R}$  (где  $X$  – область определения функционала  $f$ ,  $\bar{R}$  – совокупность всех действительных чисел, дополненная значениями  $+\infty$  и  $-\infty$ ) и ограничение, т.е. подмножество  $C \subset X$ . Таким образом, формализовать задачу – значит точно описать ее элементы:  $f, X, C$ . Для формализованной задачи употребляется запись:

$$f(x) \rightarrow \inf(\sup); x \in C. \quad (1)$$

Точки  $x \in C$  называются *допустимыми*. Если  $C = X$ , то задача называется задачей без ограничений.

Задачу на максимум всегда можно свести к задаче на минимум, заменив задачу  $f(x) \rightarrow \sup; x \in C$ , задачей  $\tilde{f}(x) \rightarrow \inf; x \in C$ , где  $\tilde{f}(x) = -f(x)$ . И наоборот, задачу на минимум можно аналогичным образом свести к задаче на максимум.

Допустимая точка  $\hat{x}$  называется *абсолютным (глобальным) минимумом (максимумом)* в задаче (1), если  $f(x) \geq f(\hat{x})$  для любого  $x \in C$  (соответственно  $f(x) \leq f(\hat{x})$  для любого  $x \in C$ ). Абсолютный минимум (максимум) задачи называется решением задачи и обозначается  $\hat{x} \in \text{abs min 1}(\text{abs max 1})$ , величина  $f(\hat{x})$ , где  $\hat{x}$  – решение задачи, называется численным значением задачи и обозначается  $S_{\min}(S_{\max})$ .

Кроме глобальных экстремумов существуют локальные экстремумы. Пусть в задаче (1)  $X$  – нормированное пространство. Точка  $\hat{x}$  доставляет в (1) *локальный минимум (максимум)* и обозначается  $\hat{x} \in \text{loc min 1}(\text{loc max 1})$ , если  $\hat{x} \in C$  и существует  $\delta > 0$ , такое, что для любой допустимой точки  $x$ , для которой  $\|x - \hat{x}\| < \delta$ , выполняется неравенство  $f(x) \geq f(\hat{x})$  ( $f(x) \leq f(\hat{x})$ ). Иными словами, если  $\hat{x} \in \text{loc min 1}(\text{loc max 1})$ , то существует окрестность  $U$  точки  $\hat{x}$ , такая, что  $\hat{x} \in \text{abs min 1}'(\text{abs max 1}')$  в задаче

$$f(x) \rightarrow \inf(\sup); x \in C \cap U. \quad (1')$$

Таким образом, порядок решения экстремальной задачи состоит в выделении множества критических точек, среди которых производится поиск точек абсолютных экстремумов. В множество критических точек следует включать:

- точки локальных экстремумов;
- точки, соответствующие границам допустимой области;
- точки разрыва оптимизируемой функции.

### *Математическое программирование, линейное программирование, выпуклое программирование*

*Математическое программирование.* Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, т. е. задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. Общая задача математического программирования состоит в нахождении оптимального (максимального или минимального) значения целевой функции  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  (функция, экстремальное значение которой требуется найти) при условиях  $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i$ , где  $f$  и  $g_i$  – заданные функции, а  $b_i$  – некоторые действительные числа.

В зависимости от свойств целевой функции и функции ограничений все задачи математического программирования делятся на задачи линейного и нелинейного программирования. При этом если все функции  $f$  и  $g_i$  линейные, то соответствующая задача поиска экстремума является задачей *линейного* программирования. Если же хотя бы одна из указанных функций нелинейная, то соответствующая задача является задачей *нелинейного* программирования. Наиболее изученным разделом математического программирования является линейное программирование. Для решения задач линейного программирования разработан целый ряд эффективных методов, алгоритмов и программ.

Среди задач *нелинейного* программирования наиболее глубоко изучены задачи *выпуклого программирования*. Это задачи, в результате решения которых определяется минимум или максимум выпуклой (вогнутой) функции, заданной на выпуклом замкнутом множестве. Для этих задач характерно то, что любой локальный минимум оказывается глобальным, и все сводится к нахождению этого единственного минимума. Для решения задач этого типа разработаны многочисленные численные методы, приспособленные для решения на ЭВМ, в основном связанные с понятием градиента целевой функции и основной идеей о том, что функция наиболее быстро убывает, если двигаться в направлении, противоположном градиенту. К ним относятся метод градиентного спуска, метод сопряженных градиентов и т.д.

Отдельными классами задач математического программирования являются задачи целочисленного, параметрического и дробно - линейного программирования.

В задачах *целочисленного* программирования неизвестные могут принимать только целочисленные значения. В задачах *параметрического* программирования целевая функция или функции, определяющие область возможных изменений переменных, либо то и другое зависят от некоторых параметров. В задачах *дробно-линейного* программирования целевая функция представляет собой отношение двух линейных функций, а функции, определяющие область возможных изменений переменных, также являются линейными.

Выделяют отдельные классы задач стохастического и динамического программирования. Если в целевой функции или в функциях, определяющих область возможных изменений переменных, содержатся случайные величины, то такая задача относится к задаче *стохастического* программирования.

Задача, процесс нахождения решения которой является многоэтапным, относится к задаче *динамического* программирования.

*Линейное программирование.* Линейное программирование – один из наиболее полно теоретически разработанных разделов методов оптимизации. В этом разделе изучают задачи об экстремуме линейной функции при ограничениях типа равенств и неравенств, задаваемых также линейными функциями.

Линейная математическая модель в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} Z &= z_1x_1 + z_2x_2 + \dots + z_nx_n \rightarrow \text{extr}, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &\leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &\leq b_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &\leq b_m, \\ x_i &> 0, i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

где  $z_i, b_j, a_{ji}$  – заданные постоянные величины,  $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$ .

Задача линейного программирования формулируется следующим образом: найти экстремальное значение линейной целевой функции  $Z$  при ограничениях, заданных в форме линейных равенств и (или) неравенств, и граничных условиях, указывающих диапазон изменения переменных.

В реальных оптимизационных задачах ищется или минимум или максимум целевой функции. Методы линейного программирования работают совершенно

одинаково, как при поиске минимума целевой функции, так и при поиске ее максимума. К методам линейного программирования относят *графическое решение задачи* и *симплекс-метод*. Метод графического решения является достаточно простым, наглядным и позволяет сделать некоторые общие выводы по решению оптимизационных задач методами линейного программирования. Однако применение графического метода ограничено задачами относительно небольшой размерности.

*Симплекс-метод*. Данный метод является универсальным аналитическим методом решения задач линейного программирования. Метод состоит из двух этапов: 1 – ищется допустимое решение, 2 – найденное допустимое решение улучшается до оптимального.

Рассмотрим математическую модель линейной оптимизационной задачи, в которой требуется найти минимум целевой функции:

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \rightarrow \min, \quad (3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \beta_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= \beta_2, \\ &\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= \beta_m. \end{aligned} \quad (4)$$

и граничных условиях неотрицательности переменных  $x_i \geq 0, i = 1, \dots, n$ .

В случае, если ограничения имеют вид неравенств, то необходимо от неравенств перейти к равенствам путем введения дополнительных неотрицательных переменных. В таком случае дополнительно введенные переменные в окончательном ответе игнорируются.

Преобразуем ограничения (4) так, чтобы какие-либо  $r$  ее неизвестных были выражены через остальные:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n + \beta_1, \\ &\dots \\ x_r &= a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_{rn}x_n + \beta_r. \end{aligned} \quad (5)$$

Переменные  $x_1, \dots, x_r$  называют *базисными*, остальные переменные называются *свободными*. Совокупность базисных переменных называется *базисом*. Подставляя вместо базисных переменных их выражения через свободные, мы можем целевую функцию представить через свободные неизвестные:  $z = \gamma_0 + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_nx_n$ .

Теперь, полагая, что все свободные переменные равны 0, из (5) получаем значения базисных переменных:

$$x_1 = \beta_1,$$

...

$$x_r = \beta_r.$$

Таким образом получаем одно из решений системы (5), которое называется допустимым. Для этого решения значение целевой функции равно  $z = \gamma_0$ .

Основная идея симплекс-метода заключается в том, что последовательно переходят от одного базиса к другому так, чтобы новое значение целевой функции уменьшилось. Таким путем в конечном итоге можно прийти к базису, дающему минимальное значение функции  $z$  или выяснить, что задача не имеет решения. Переход

от одного базиса к другому происходит за счет удаления одной переменной из базиса и добавления в него другой переменной.

Вычисления по симплекс-методу осуществляют с помощью симплекс-таблиц. Для удобства будем считать, что система ограничений записана в виде:

$$x_1 + a_{1r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = \beta_1,$$

...

$$x_r + a_{rr+1}x_{r+1} + \dots + a_m x_n = \beta_r.$$

и целевая функция определена равенством:  $z + \gamma_{r+1}x_{r+1} + \dots + \gamma_n x_n = \gamma_0$ .

По исходным данным заполняется следующая таблица.

Таблица – 1

Базисные неизвестные	Свободные члены	$X_1$	...	$X_r$	$X_{r+1}$	...	$X_n$
$X_1$	$\beta_1$	1	...	0	$a_{1r+1}$	...	$a_{1n}$
...	...	...	...	...	...	...	...
$X_r$	$\beta_r$	0	...	1	$a_{rr+1}$	...	$a_{rn}$
$Z$	$\gamma_0$	0	...	0	$\gamma_{r+1}$	...	$\gamma_n$

Алгоритм симплекс-метода задачи линейного программирования.

1. Выяснить, есть ли в последней строке таблицы положительные числа ( $\gamma_0$  во внимание не принимается). Если все числа отрицательные, то процесс закончен. Базисное решение  $(\beta_1, \beta_r, 0, \dots, 0)$  является оптимальным. Соответствующее значение целевой функции  $z = \gamma_0$ . Если в последней строке имеются положительные числа, перейти к п. 2.

2. Рассмотреть столбец, соответствующий положительному числу из последней строки и выяснить, имеются ли в нем положительные числа. Если ни в одном из таких столбцов нет положительных чисел, то уменьшать значение целевой функции можно бесконечно и оптимального решения задачи не существует. Если найдется столбец, содержащий хотя бы один положительный элемент (если таких столбцов несколько, выбираем произвольный из них), отметить этот столбец вертикальной стрелкой и перейти к п. 3.

3. Разделить свободные члены на соответствующие положительные числа из выделенного столбца и выбрать наименьшее частное. Отметить строку таблицы, соответствующую наименьшему частному горизонтальной стрелкой. Выделить разрешающий элемент  $a_{ij}$ , стоящий на пересечении отмеченных строки и столбца и перейти к п. 4.

4. Разделить элементы выделенной строки исходной таблицы на разрешающий элемент. На месте разрешающего элемента появится 1. Полученная таким образом новая строка пишется на месте прежней в новой таблице (причем из базисных переменных исключается  $x_i$  и на его месте записывается переменная  $x_j$ ). Перейти к п. 5.

5. Каждая следующая строка новой таблицы образуется сложением соответствующей строки исходной таблицы и строки, записанной в п. 4, которая предварительно умножается на такое число, чтобы в клетках выделенного столбца появились нули. На этом заполнение новой таблицы заканчивается и происходит переход к п. 1.

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Основные понятия экстремальных задач.
2. Виды математического программирования.
3. Симплекс-метод линейного программирования.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [6].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Постановка задачи выпуклого программирования и методы ее решения.
2. Задачи на минимакс. Области применения.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [6].

*Тема:* «Элементы теории вероятностей и математической статистики. Применение методов математической статистики при решении научных задач»

*Основные понятия темы:* регрессионные модели, метод наименьших квадратов, парная регрессия, оценка модели, статистический анализ регрессионной модели, t-статистика Стьюдента, F-статистика Фишера, статистика Дарбина-Уотсона.

### ***Материалы лекций***

#### ***Элементы теории случайных процессов***

*Регрессионный анализ. Основные подходы.* Регрессионный анализ представляет собой классический статистический метод. Благодаря своим широким возможностям регрессионные методы давно и успешно используются в практике, в том числе инженерной. В последнее время в связи с развитием и внедрением быстродействующих ЭВМ они широко используются для идентификации моделей, в том числе для идентификации динамических, многомерных процессов, систем диагностики и управления в реальном масштабе времени.

Два принципа регрессионного анализа.

1. Методы применяются для линейных по идентифицируемым параметрам моделей. Структура математической модели процесса представляется функцией вида:

$$y = \sum_{i=1}^n a_i f_i(\vec{x}), \quad (1)$$

где  $a_i$  – i-ый оцениваемый параметр;  $f_i(\vec{x})$  – i-ая известная функция,  $\vec{x}$  – вектор входных воздействий,  $y$  – выходная переменная.

Возможно представление идентифицируемой модели в следующей форме:

$$y = \frac{\sum_{i=1}^n a_i f_i(\vec{x})}{1 + \sum_{j=1}^m b_j \psi_j(\vec{x})} \quad (2)$$

где  $a_i$ ,  $b_j$  – оцениваемые параметры;  $f_i(\vec{x})$  и  $\psi_j(\vec{x})$  – априори известные (заданные) функции.

На практике, чаще всего в качестве  $f_i(\vec{x})$  и  $\psi_j(\vec{x})$  выбираются степенные функции, а соответственно выражения (1) и (2) являются полиномиальными, либо дробно-рациональными зависимостями. При этом точность описания достигается

увеличением числа членов полинома, обеспечивающих их сходимость к реальному процессу. Заметим, что получающаяся модель практически никогда не соответствует физической сущности моделируемого реального процесса, его истинному виду, однако инженерная простота вычислений, удобство практического использования модели, возможность получения результата без «особых размышлений» служит основной причиной широкого распространения на практике регрессионных методов.

Естественно, и в этом случае с помощью удачно выбранного вида полинома можно существенно сократить размер модели, а значит и трудоемкость вычислительного процесса, как при идентификации, так и при использовании модели.

2. Минимизируемой функцией ошибки(разности между прогнозируемой моделью и данными эксперимента)при регрессионном анализе является сумма квадратов ошибок. Благодаря этому удается применить *метод наименьших квадратов (МНК)*, математический аппарат, вычислительные методы которого сводятся к методам линейной алгебры.

Регрессионные модели могут быть как линейными, так и нелинейными с любым числом входов и выходов.

Пусть необходимо идентифицировать систему с «*n*» входами  $x_1, x_2, \dots, x_n$  и одним выходом  $y$ . Представим структуру модели в виде линейного алгебраического уравнения вида:

$$y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n, \quad (3)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$ - параметры модели, подлежащие идентификации. В результате идентификации мы должны получить *вектор оценок*  $\hat{\vec{a}}$  истинного вектора  $\vec{a}$ . Этому выходному вектору будет соответствовать оценка значения выходной величины  $\hat{y}$ .

Для определения значений  $\hat{a}_i$  произведем  $N$  последовательных измерений величины  $y$ , соответствующих в определенном смысле произвольным наборам величин  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ). В результате получим вектор  $\vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_N)$ . По  $N$  наборам входных величин  $x_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ) получим соответственно  $N$  оценок выходных величин

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1^{(1)} + \hat{a}_2 x_2^{(1)} \\ \hat{y}_2 &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1^{(2)} + \hat{a}_2 x_2^{(2)} \\ &\dots \\ \hat{y}_N &= \hat{a}_0 + \hat{a}_1 x_1^{(N)} + \hat{a}_2 x_2^{(N)} \end{aligned} \quad (4)$$

Разница  $\hat{y}_j - y_j$  характеризует погрешность каждой модели в каждом из  $N$  измерений. Суммарную погрешность будем характеризовать величиной:

$$J = \sum_{j=1}^N (\hat{y}_j - y_j)^2 \quad (5)$$

Определение оценок  $\hat{a}_i$  производят из условия минимума величины суммарной погрешности  $J$ . Используя аппарат математического анализа, оценка вектора  $\hat{\vec{a}}$  должна удовлетворять необходимому условию экстремума

$$\frac{\partial J}{\partial \hat{a}_i} = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n)$$

Уравнения (4) позволяют построить вычислительный процесс идентификации вектора  $\vec{a}$  на основе  $N$  групп измерений  $y$  и  $\vec{x}$ . Для получения эффективных и

несмешанных оценок  $\hat{a}_i$  необходимо, чтобы  $N >> n$ . Если  $N = n + 1$ , то в оценке  $\bar{\hat{y}}$  шум измерений не будет сглажен, окажет негативное влияние и случайность наборов  $\vec{x}$ .

*Парная линейная регрессия.* Формула статистической связи двух переменных называется *парной регрессией*, зависимость от нескольких переменных – *множественной регрессией*. Рассмотрим процесс идентификации модели на примере парной регрессии.

Модель парной линейной регрессии имеет вид:  $y = a + bx + \varepsilon$

Например, Кейнсом была предложена линейная формула зависимости частного потребления от располагаемого дохода:

Год	1983	1984	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992
Доход	3860	4114	4243	4362	4497	4674	4801	4840	4784	4907
Потребление	2533	2657	2772	2878	2961	3075	3141	3178	3161	3243

Эти данные могут быть представлены в виде точек на координатной плоскости (*диаграммы рассеивания*) (одна ось – доход, другая – потребление).

Модель имеет вид  $y = a + bx + \varepsilon$ , где  $y$  – потребление,  $x$  – доход,  $a > 0$ ,  $1 > b > 0$ ,  $a$  – величина автономного потребления,  $b$  – предельная склонность к потреблению.

Имеется некоторое облако точек наблюдений, через него мы должны провести прямую, которая является наилучшей в определенном смысле среди всех прямых линий, т.е. ближайшей к точкам наблюдений по их совокупности. Мерой близости в данном случае является сумма квадратов ошибок  $J$ :

$$J = \sum_i (y_i - (a + bx_i))^2 \rightarrow \min$$

Т.к.  $J$  непрерывна, выпукла и ограничена снизу нулем, то она имеет  $\min$ . Для определения соответствующих точке этого минимума значений  $a$  и  $b$  используют МНК. Для того, чтобы функция  $J$  достигала минимума, необходимо равенство нулю ее частных производных:

$$\begin{cases} J'_b = -2 \sum_i (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \\ J'_a = -2 \sum_i (y_i - a - bx_i) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sum_i y_i x_i - a \sum_i x_i - b \sum_i x_i^2 = 0 \\ \sum_i y_i - Na - b \sum_i x_i = 0 \end{cases}$$

Если нижнее уравнение разделить на  $N$ , то получим  $\bar{y} = a + b\bar{x}$ , т.е. линия регрессии проходит через точку со средними значениями  $x$  и  $y$ . Решив систему, получим значения параметров. Если выразить  $a$  из второго уравнения и подставить в первое, то путем несложных преобразований получим:

$$\sum_i y_i x_i = \sum_i x_i (\bar{y} - b\bar{x}) + b \sum_i x_i^2 = n\bar{x}(\bar{y} - b\bar{x}) + b \sum_i x_i^2.$$

$$\text{Откуда } b = \frac{\sum_i y_i x_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_i x_i^2 - n \bar{x}^2} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}; \text{ т.е. } b = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

$$b = \frac{\text{cov}(x, y)}{D(x)} = r \frac{\sqrt{D(y)}}{\sqrt{D(x)}}, a = \bar{y} - b \bar{x}.$$

$r$  - коэффициент корреляции на дисперсию.

Итак, модель имеет вид  $y = a + bx + \varepsilon$ , величина  $\varepsilon$  неизвестна. Поэтому, на основе  $N$  испытаний мы можем получить оценки параметров  $\hat{a}$  и  $\hat{b}$ . Если величина  $\varepsilon$  является случайной переменной, мат ожидание ее равно 0, она имеет некоторую постоянную дисперсию  $\sigma^2$  и значения  $\varepsilon_i$  независимы между собой, то оценки, сделанные на основе МНК являются:

1. *несмешенными*, т.е.  $M(a) = \hat{a}, M(b) = \hat{b}$
2. *состоятельны*:  $\lim_{N \rightarrow \infty} D(a) = 0, \lim_{N \rightarrow \infty} D(b) = 0$ , т.е. если число испытаний велико, то  $\hat{a}$  близко к  $a$  и  $\hat{b}$  близко к  $b$ ;
3. *эффективны*, т.е. они имеют наименьшую дисперсию по сравнению с любыми другими оценками данного параметра, линейными относительно величин  $y_i$ .

Перечисленные свойства не зависят от вида распределения ошибок, но обычно предполагается, что они распределены нормально. Это предположение необходимо для проверки статистической значимости сделанных оценок и определения для них доверительных интервалов.

*Методы оценки модели парной регрессии.* Надежность получаемых оценок  $a$  и  $b$  зависит, очевидно, от дисперсии случайных отклонений  $e_i$ , но поскольку по данным выборки эти отклонения оценены быть не могут, они заменяются при анализе надежности оценок коэффициентов регрессии на отклонения переменной  $y$  от оцененной линии регрессии  $e_i = y_i - a - bx_i$

В литературе доказано, что

$$D(b) = S_b^2 = \frac{S^2}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2};$$

$$D(a) = S_a^2 = \frac{S^2 \sum_i x_i^2}{n \sum_i (x_i - \bar{x})^2},$$

где  $S_a^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$  – мера разброса зависимой переменной вокруг линии регрессии (*необъясненная дисперсия*).  $S_a$  и  $S_b$  - стандартные отклонения случайных величин  $a$  и  $b$ .

$b$  характеризует наклон прямой. В знаменателе величины  $D(b)$  стоит сумма квадратов отклонений  $x_i$  от среднего значения  $\bar{x}$ . Эта сумма велика в том случае, если регрессия оценена на достаточно широком диапазоне значений переменной  $x$ , и в этом случае, при

данном уровне разброса  $\gamma_i$ , очевидно, ошибка в оценке величины наклона прямой будет меньше, чем при малом диапазоне изменения переменной  $x$ .

Дисперсия свободного члена уравнения регрессии равна  $D(a) = D(b) \frac{\sum x_i^2}{n}$  - она пропорциональна  $D(b)$ , и, тем самым, также соответствует уже сделанным пояснениям.

Значимость оцененного коэффициента регрессии может быть проверена с помощью анализа его отношения к своему стандартному отклонению  $S_b = \sqrt{D(b)}$ . Эта величина в случае выполнения исходных предпосылок модели имеет  $t$ -распределение Стьюдента с  $(n-2)$  степенями свободы ( $n$  - число наблюдений). Она называется  $t$ -статистикой:

$$t = \frac{b}{\sqrt{D(b)}} = \frac{b}{S_b}.$$

Для  $t$ -статистики проверяется нулевая гипотеза, то есть гипотеза о равенстве ее нулю. Очевидно,  $t = 0$  равнозначно  $b = 0$ , поскольку пропорциональна  $b$ .

При оценке значимости коэффициента линейной регрессии можно использовать следующее грубое правило. Если стандартная ошибка коэффициента больше его модуля ( $|t| < 1$ ), то оценка не является значимой. Если стандартная ошибка меньше модуля коэффициента, но больше его половины ( $1 < |t| < 2$ ), то сделанная оценка может рассматриваться как более или менее значимая. Доверительная вероятность здесь примерно от 0,7 до 0,95. Значение от 2 до 3 свидетельствует о весьма значимой связи (доверительная вероятность от 0,95 до 0,99), и  $|t| > 3$  есть практически стопроцентное свидетельство ее наличия. Конечно, в каждом случае играет роль число наблюдений; чем их больше, тем надежнее при прочих равных выводы о наличии связи.

Рассмотрим конкретный пример, приведенный выше. Пусть INF - темп инфляции, U - уровень безработицы в США в 1931 - 1940 годы (10 наблюдений). Точки наблюдений показаны на рис. 1.

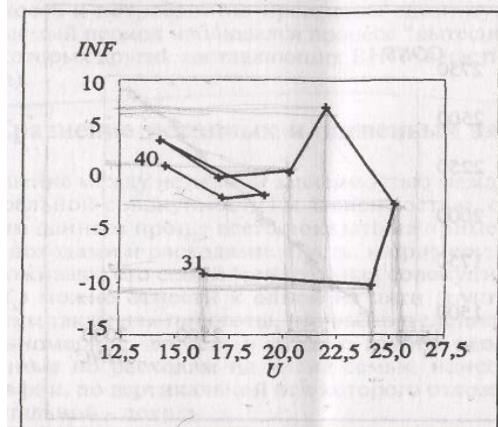


Рис.1 – Наблюдения случайной величины.

Из рис. 1 можно видеть, что, возможно, есть некоторая отрицательная связь показателей INPi U, но вряд ли этот рисунок подтверждает наличие статистически значимой линейной связи. Для проверки этого вывода оценена парная регрессия  $INF = 5,07 - 0,32U$ .

Оценена

величина

$$S_b^2 = \frac{S^2}{\sum_i x_i^2 - \bar{x}^2} = \frac{\sum_i e_i^2}{(n-2) \left( \sum_i x_i^2 - \bar{x}^2 \right)} = \frac{\sum_i (y_i - a - bx_i)^2}{8 \left( \sum_i x_i^2 - \bar{x}^2 \right)} \approx 0,236, S_b = 0,486.$$

Отсюда  $t = -\frac{0,32}{0,486} \approx -0,658$ . Зададим уровень значимости 0,1 при двусторонней

альтернативной гипотезе. Таблицы для  $t$ -статистик обычно публикуются для односторонней альтернативной гипотезы ( $t > 0$ ), найдем критическое значение для уровня значимости 0,05 (доверительная вероятность 0,95) с  $(n-2) = 8$  степенями свободы  $t_{8:0.95} = 1,860$  и сравним с ним  $|t| = 0,658$ .

Поскольку  $|t| < 1,860$ , нулевая гипотеза  $\{t = 0\}$  не может быть отвергнута при заданном уровне значимости. Иными словами, нельзя считать (грубо говоря), что уровень инфляции в рассматриваемый период значимо зависел от показателя безработицы. Если уровень значимости задать равным 0,3, то  $t_{8:0.85} = 1,108 > 0,658$ , - даже при такой слабой значимости нулевая гипотеза не может быть отвергнута.

### Элементы теории проверки статистических гипотез

*t-статистика. Распределение Стьюдента в регрессионном анализе.* Рассмотрим основные свойства распределения Стьюдента. Безразмерная величина  $t$ -статистика, определяется выражением

$$t = \frac{x - \mu}{s}.$$

В этом выражении вместо стандартного отклонения для генеральной совокупности  $\mu$  стоит выборочное стандартное отклонение  $s$ , являющееся, по сути, случайной величиной (меняющейся от выборки к выборке) и определяемое по данным наблюдений  $x_k$  с помощью выражения:

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2}.$$

$t$  - распределение зависит от числа степеней свободы  $v$ .

Распределение Стьюдента есть случайная величина, равная отношению двух независимых случайных величин: стандартной нормально распределенной величины  $Z$  (с

нулевым средним значением и единичной дисперсией) и величины  $\sqrt{\frac{\chi^2(n)}{n}}$ ,

выражающейся через случайную величину, имеющую распределение  $\chi^2$  с  $n$  степенями свободы. Распределение  $\chi^2$  (распределение Пирсона), имеет сумма квадратов  $n$  независимых стандартных нормально распределенных случайных величин. Вводя новую случайную величину

$$T(n) = \frac{Z \sqrt{n}}{\sqrt{\chi^2(n)}} = \sqrt{\frac{\chi^2(1)}{\frac{1}{n} \chi^2(n)}},$$

мы получим для нее  $t$ -распределение Стьюдента с  $n$  степенями свободы.

График функции плотности вероятности распределения Стьюдента (рис. 2), как и стандартного нормального распределения, имеет симметричный колоколообразный вид, но является более "сплюснутым" по вертикали.

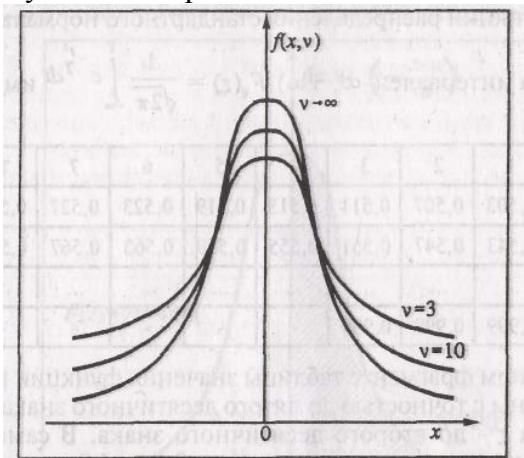


Рис.2 – Плотности вероятности распределения Стьюдента

На практике обычно используют таблицы критических точек функции распределения Стьюдента, то есть точек с заданной вероятностью попадания в начинающиеся от них "хвосты" распределения (рис. 3). Таблица функции распределения Стьюдента имеет вид:

$v \setminus \alpha$	0,005	0,01	0,025	0,05	0,1
1	63,657	31,821	12,706	6,314	3,078
...	...	...	...	...	...
10	3,169	2,764	2,228	1,812	1,372
...	...	...	...	...	...
30	2,750	2,457	2,042	1,697	1,310
$\infty$	2,576	2,326	1,960	1,645	1,282

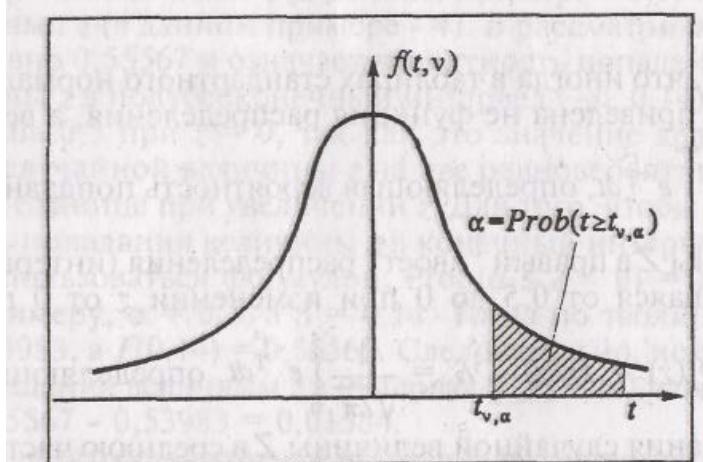


Рис 3 – Односторонняя критическая область распределения Стьюдента

Число  $\alpha$  - это вероятность превышения  $t$ -статистикой приведенного в таблице критического значения при соответствующем числе степеней свободы  $V$ .

Критическая точка в данном случае имеет следующий смысл:  $\text{Prob}\{t > t_{v,\alpha}\} = \alpha$ .

Распределение Стьюдента используется, например, при проверке гипотез:

- о среднем значении нормальной генеральной совокупности при неизвестной дисперсии;
- о линейной независимости двух случайных величин (равенстве нулю коэффициента корреляции);
- о статистической значимости коэффициента линейной регрессии.

*Проверка гипотез о корреляции случайных переменных.* В качестве меры для степени линейной связи двух переменных используется коэффициент их корреляции. Выборочный коэффициент корреляции переменных:

$$r_n(x, y) = \frac{\frac{1}{n} \sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_k (x_k - \bar{x})^2} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_m (y_m - \bar{y})^2}}$$

Коэффициент корреляции положителен, если отклонения переменных  $y$  и  $x$  от своих средних значений имеют, как правило, одинаковый знак, и отрицательным – если разные знаки.

Коэффициент корреляции является безразмерной величиной и не зависит от выбора единиц измерения обеих переменных. Величина коэффициента корреляции меняется от -1 в случае строгой линейной отрицательной связи до +1 в случае строгой линейной положительной связи. Близкая к 0 величина коэффициента корреляции говорит об отсутствии линейной связи переменных, но не об отсутствии связи между ними вообще. Такая ситуация возникает, когда каждой паре одинаковых отклонений переменной  $x$  от ее среднего соответствуют равные по модулю положительное и отрицательное отклонения переменной  $y$  от ее среднего, соответствующие слагаемые сокращаются и сумма близка к 0.

При каждом конкретном значении коэффициента корреляции величин  $X$  и  $Y$  для генеральной совокупности выборочный коэффициент корреляции является случайной величиной. Следовательно, случайной величиной является также любая его функция, и требуется указать такую функцию, которая имела бы одно из известных распределений, удобное для табличного анализа. Для выборочного коэффициента корреляции такой функцией является  $t$  - *статистика*, рассчитываемая по формуле  $t = r \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$  и имеющая распределение Стьюдента с  $(n-2)$  степенями свободы.

Для коэффициента корреляции проверяется *нулевая гипотеза*, то есть гипотеза о равенстве его нулю в генеральной совокупности.

Нарис. 4. дана иллюстрация проверки нулевой гипотезы для коэффициента корреляции, которая может быть использована для рассмотрения *общей схемы проверки статистических гипотез*. Здесь  $H_0$  - гипотеза о том, что истинное значение коэффициента корреляции равно нулю, альтернативная ей гипотеза  $H_1$ , - что оно не равно нулю. Функция  $f_z$  - функция плотности вероятности распределения Стьюдента в случае, если нулевая гипотеза верна.

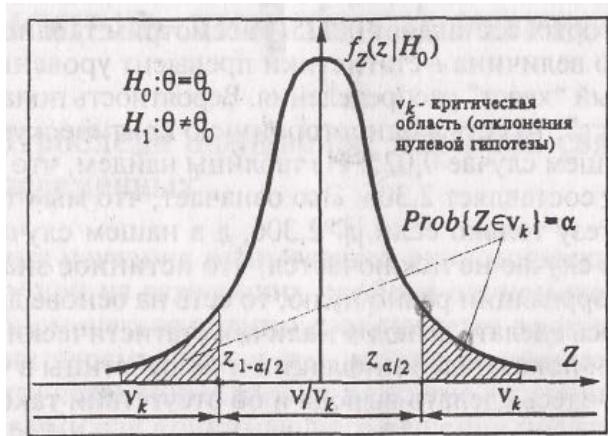


Рис. 4 –Проверка нулевой гипотезы для коэффициента корреляции

Заштрихованная область – это область маловероятных при выполнении гипотезы  $H_0$  значений выборочного коэффициента корреляции. Если последнее все-таки попало в эту область, то  $H_0$  отвергается. Площадь заштрихованной области, равная  $\alpha$ , - уровень значимости, или вероятность того, что туда попадет величина  $Z$  при выполнении  $H_0$ .

Рассмотрим процедуру и примеры проверки нулевой гипотезы для коэффициента корреляции на конкретном примере. Этот пример поможет показать логику и процедуру проверки статистических гипотез вообще. Взяты 10 наблюдений показателей инфляции и безработицы в США за 1931-1940 годы, для них рассчитан выборочный коэффициент корреляции, составивший -0,227. Связь отрицательная, но значима ли она? Проверим гипотезу  $H_0$ : о равенстве нулю истинного значения коэффициента корреляции. Для проверки гипотезы  $H_0$ , как уже говорилось, следует использовать  $t$ -статистику с  $n-2$  степенями свободы:

$$t = r \frac{\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

В нашем примере  $t$ -статистика составляет -0,66. Зададим уровень значимости  $\alpha = 0,05$ , то есть 5%. Рассмотрим таблицы вероятности того, что величина  $t$ -статистики превысит уровень  $z$ , то есть попадет в правый "хвост" распределения. Вероятность попасть только в правый "хвост", то есть в одностороннюю критическую область, равна  $\alpha/2$ , в нашем случае 0,025. Из таблицы найдем, что критическое значение  $z$  составляет 2,306. Это означает, что мы отвергли бы нулевую гипотезу только если  $|t| > 2,306$ , а в нашем случае  $|t| = 0,66$ . Итак, в нашем случае не исключается, что истинное значение коэффициента корреляции равно нулю, то есть на основе данной выборки не удалось сделать вывод о наличии статистически значимой линейной связи показателей инфляции и безработицы в США.

Оценка параметров конкретного уравнения является лишь отдельным этапом длительного и сложного процесса построения эконометрической модели. Первое же оцененное уравнение очень редко является удовлетворительным во всех отношениях. Обычно приходится постепенно подбирать формулу связи и состав объясняющих переменных, анализируя на каждом этапе качество оцененной зависимости. Этот анализ качества включает статистическую и содержательную составляющую. Проверка *статистического качества оцененного уравнения* состоит из следующих элементов:

- проверка статистической значимости каждого коэффициента уравнения регрессии;
- проверка общего качества уравнения регрессии;
- проверка свойств данных, выполнение которых предполагалось при оценивании уравнения.

Под содержательной составляющей анализа качества понимается рассмотрение экономического смысла оцененного уравнения регрессии: действительно ли значимыми оказались объясняющие факторы, важные с точки зрения теории; положительны или отрицательны коэффициенты, показывающие направление воздействия этих факторов; попали ли оценки коэффициентов регрессии в предполагаемые из теоретических соображений интервалы.

Методика проверки статистической значимости каждого отдельного коэффициента уравнения линейной регрессии была рассмотрена ранее.

*Проверка общего качества уравнения регрессии. Коэффициент детерминации  $R^2$ .* Для анализа общего качества оцененной линейной регрессии используют обычно коэффициент детерминации  $R^2$ , называемый также квадратом коэффициента множественной корреляции. Для случая парной регрессии – это квадрат коэффициента корреляции переменных  $x$  и  $y$ . Коэффициент детерминации рассчитывается по формуле

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}.$$

Он характеризует долю вариации (разброса) зависимой переменной, объясненной с помощью данного уравнения.

Если числитель и знаменатель вычитаемой из единицы дроби разделить на число наблюдений  $n$ , то получим, соответственно, выборочные оценки остаточной дисперсии и дисперсии зависимой переменной  $y$ . Отношение остаточной и общей дисперсий представляет собой долю необъясненной дисперсии. Если же эту долю вычесть из единицы, то получим долю дисперсии зависимой переменной, объясненной с помощью регрессии. Иногда при расчете коэффициента детерминации для получения несмешанных оценок дисперсии в числителе и знаменателе вычитаемой из единицы дроби делается поправка на число степеней свободы, тогда

$$R^2 = 1 - \left[ \frac{\sum_i e_i^2}{n-m-1} \right] : \left[ \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}{n-1} \right].$$

Дробь эта мала (а коэффициент  $R^2$ , очевидно, близок к единице) если разброс точек вокруг линии регрессии значительно меньше, чем вокруг среднего значения.

Если существует статистически значимая линейная связь величин  $x$  и  $y$ , то коэффициент  $R^2$  близок к единице. Однако он может быть близким к единице просто в силу того, что обе эти величины имеют выраженный временной тренд, не связанный с их причинно-следственной взаимозависимостью.

Точную границу приемлемости показателя  $R^2$  указать сразу для всех случаев невозможно. Нужно принимать во внимание и число степеней свободы уравнения, и наличие трендов переменных, и содержательную интерпретацию уравнения. Показатель  $R^2$  может оказаться даже отрицательным. Как правило, это случается в уравнении без свободного члена  $y = \sum_i a_i x_i$ . Оценивание такого уравнения производится, как и в общем случае, по МНК. Однако множество выбора при этом существенно сужается: рассматриваются не все возможные прямые или гиперплоскости, а только проходящие через начало координат.

Отрицательная величина  $R^2$  в уравнении  $y = \sum_i a_i x_i$  говорит о целесообразности введения в него свободного члена. Поправка на число степеней свободы всегда уменьшает

значение  $R^2$ , поскольку  $(n-1) > (n-m-1)$ . В результате величина  $R^2$  также может стать отрицательной. Но это означает, что она была близкой к нулю до такой поправки, и объясненная с помощью уравнения регрессии доля дисперсии зависимой переменной очень мала.

*F-статистика. Распределение Фишера в регрессионном анализе.* Как было сказано ранее, анализ общего качества оцененной линейной регрессии может быть выполнен на основе расчета коэффициента детерминации  $R^2$ . Для определения статистической значимости коэффициента детерминации  $R^2$  проверяется нулевая гипотеза для F-статистики, рассчитываемой по формуле:

$$F = \frac{R^2}{1-R^2} \cdot \frac{n-m-1}{m}.$$

Соответственно, для парной регрессии:  $F = \frac{R^2(n-2)}{1-R^2}$ .

Смысл проверяемой гипотезы заключается в том, что все коэффициенты линейной регрессии, за исключением свободного члена, равны нулю. Если они действительно равны нулю для генеральной совокупности, то уравнение регрессии должно иметь вид  $y = \bar{y}$ , а коэффициент детерминации  $R^2$  и F-статистика Фишера также равны нулю. При этом их оценки для случайной выборки, конечно, отличаются от нуля, но чем больше такое отличие, тем менее оно вероятно. Логика проверки нулевой гипотезы заключается в том, что если произошло событие, которое было бы слишком маловероятным в том случае, если данная гипотеза действительно была бы верна, то эта гипотеза отвергается.

Величина F, если предположить, что выполнены предпосылки относительно отклонений  $e_i$ , имеет распределение Фишера с  $(m; n-m-1)$  степенями свободы, где  $m$  - число объясняющих переменных,  $n$  - число наблюдений. Распределение Фишера - двухпараметрическое распределение неотрицательной случайной величины.

Для распределения Фишера имеются таблицы критических значений, зависящих от чисел степеней свободы  $m$  и  $n-m-1$ , при различных уровнях значимости. Для проверки этой гипотезы при заданном уровне значимости по таблицам находится критическое значение  $F_{крит}$ , и нулевая гипотеза отвергается, если  $F > F_{крит}$ .

Чтобы отвергнуть гипотезу о равенстве нулю одновременно всех коэффициентов линейной регрессии, коэффициент детерминации не должен быть очень близким к единице; его критическое значение для данного числа степеней свободы уменьшается при росте числа наблюдений и может стать сколь угодно малым.

Распределение Фишера может быть использовано не только для проверки гипотезы об одновременном равенстве нулю всех коэффициентов линейной регрессии, но и гипотезы о равенстве нулю части этих коэффициентов. Это особенно важно при развитии линейной регрессионной модели, так как позволяет оценить обоснованность исключения отдельных переменных или их групп из числа объясняющих переменных, или же, наоборот, включения их в это число.

Пусть, например, вначале была оценена множественная линейная регрессия  $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$  по  $n$  наблюдениям с  $m$  объясняющими переменными, и коэффициент детерминации равен  $R^2$ . Затем последние  $k$  переменных исключены из числа объясняющих, и по тем же данным оценено уравнение  $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_{m-k}x_{m-k}$  для которого коэффициент детерминации равен  $R^2$  (он обязательно уменьшился, поскольку каждая дополнительная переменная объясняет часть, пусть небольшую, вариации зависимой переменной). Для того чтобы проверить

гипотезу об одновременном равенстве нулю всех коэффициентов регрессии при исключенных переменных, рассчитывается величина  $F = \frac{R_1^2 - R_2^2}{1 - R_1^2} \cdot \frac{n - m - 1}{k}$  имеющая

распределение Фишера с  $(k, n-m-1)$  степенями свободы. По таблицам, при заданном уровне значимости, находится критическое значение F-статистики, и если ее рассчитанное значение превосходит критическое, то нулевая гипотеза отвергается. В таком случае исключать сразу из числа объясняющих все k переменных некорректно.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и по поводу обоснованности включения в уравнение регрессии одной или нескольких  $(k)$  новых объясняющих

переменных. В этом случае рассчитывается F-статистика  $F = \frac{R_2^2 - R_1^2}{1 - R_1^2} \cdot \frac{n - m - k - 1}{k}$ ,

имеющая распределение  $F(k, n-m-k-1)$ , и если она превышает критический уровень, то включение новых переменных объясняет существенную часть необъясненной ранее дисперсии зависимой переменной  $y$ . Отметим лишь, что добавлять новые переменные целесообразно, как правило, по одной.

В вопросе о добавлении объясняющих переменных в уравнение регрессии полезным может оказаться рассмотрение  $R^2$  с поправкой на число степеней свободы:

$$R^2 = 1 - \left( \frac{\sum_i e_i^2}{n - m - 1} \right) \div \left( \frac{\sum_i (y_i - \bar{y})^2}{n - 1} \right)$$

Обычный  $R^2$  (без поправки) всегда растет при добавлении новой переменной; в  $R^2$  с поправкой растет величина  $m$ , уменьшающая его. Если увеличение доли объясненной дисперсии при добавлении новой переменной мало, то  $R^2$  с поправкой может уменьшиться. Если это так, то добавлять переменную нецелесообразно.

F-статистика Фишера используется также для проверки гипотезы о совпадении уравнений регрессии для отдельных групп наблюдений. Пусть имеются две выборки, содержащие, соответственно,  $n_1$  и  $n_2$  наблюдений. Для каждой из этих выборок оценено уравнение регрессии вида  $y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m$ . Пусть суммы квадратов отклонений  $y_i$  от линий регрессии равны для них, соответственно,  $S_1$  и  $S_2$ .

Пусть оценено уравнение регрессии того же вида сразу для всех  $(n_1 + n_2)$  наблюдений, и сумма квадратов отклонений  $y_i$  от линии регрессии равна для него  $S_0$ .

Тогда рассчитывается F-статистика по формуле  $F = \frac{(S_0 - S_1 - S_2)}{(S_1 + S_2)} \cdot \frac{(n_1 + n_2 - 2m - 2)}{m + 1}$

имеет распределение Фишера с  $(m+1, n_1+n_2-2m-2)$  степенями свободы. F-статистика будет близкой к нулю, если уравнение регрессии для обеих выборок одинаково, поскольку в этом случае  $S_0 = S_1 + S_2$ . Если же ее расчетное значение велико (то есть больше критического значения при данном уровне значимости), то нулевая гипотеза отвергается. Описанная процедура важна для ответа на вопрос, можно ли за весь рассматриваемый в модели период времени построить единое уравнение регрессии, или же нужно разбить его на части и на каждой из частей строить свое уравнение регрессии.

*Проверка условий, выполнение которых предполагалось при оценивании уравнения регрессии. Автокорреляция остатков. Статистика Дарбина-Уотсона.* Близкое к единице значение коэффициента детерминации  $R^2$  еще не свидетельство высокого качества уравнения регрессии. Рассмотрим рис. 5. На нем показана зависимость реального объема потребления (*CONS*, млрд.долл., 1982 г.) от численности

населения ( $POP$ , млн.) в США за 1931-1990 гг., а также линия оцененного по этим данным уравнения парной линейной регрессии. Формула этого уравнения следующая:  
 $CONS = -1817,3 + 16,7 \cdot POP$ .

Стандартные ошибки свободного члена и коэффициента регрессии равны, соответственно, 84,7 и 0,46; их t-статистики - (-21,4 и 36,8). По абсолютной величине t-статистики намного превышают 3, и это свидетельствует о высокой надежности оцененных коэффициентов. Коэффициент детерминации  $R^2$  уравнения равен 0,96, то есть объяснено 96% дисперсии объема потребления. И в то же время уже по рисунку видно, что оцененная регрессия не очень хороша: зависимость величин  $POP$  и  $CONS$  явно нелинейна. Если использовать проведенную прямую, скажем, для прогнозирования дальнейшей динамики потребления, результат будет неудовлетворительным.

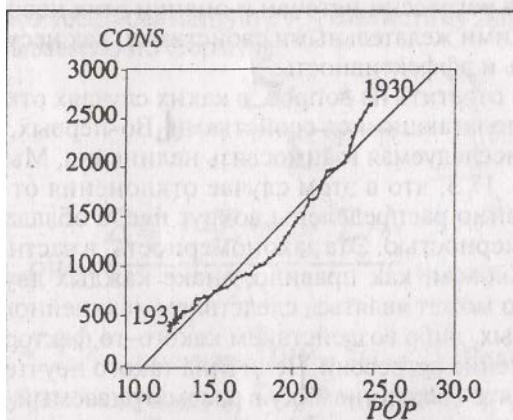


Рис. 5 –График зависимости реального объема потребления ( $CONS$ , млрд. долл., 1982 г.) от численности населения ( $POP$ , млн.) в США в 1931-1990 гг.

Как же можно выразить формально неудовлетворительность полученного уравнения регрессии? Можно видеть, что не выполнены необходимые предпосылки об отклонениях от линии регрессии  $e_i$ . Эти величины явно не являются взаимно независимыми, и дисперсия их не постоянна.

Поэтому следующий этап проверки качества уравнения регрессии - *проверка некоторых важных свойств*, выполнение которых предполагалось при оценивании уравнения регрессии.

Приступая к оценке линейного уравнения регрессии, мы предполагали, что реальная взаимосвязь переменных линейна, а отклонения от регрессионной прямой случайны, независимы между собой и имеют нулевое среднее и постоянную дисперсию. Так ли это на самом деле? Если нет, то наш анализ статистической значимости коэффициентов регрессии неточен и оценки этих коэффициентов не обладают такими желательными свойствами, как *несмещенность*, *состоительность* и *эффективность*.

Во-первых, если в действительности исследуемая взаимосвязь нелинейна. Мы видим, например, на рис. 5, что в этом случае отклонения от линии регрессии не случайно распределены вокруг нее, а обладают определенной закономерностью. Эта закономерность, в частности, выражается в одинаковом, как правило, знаке каждого двух соседних отклонений. Это может являться следствием нелинейного характера связи переменных, либо воздействием какого-то фактора, не включенного в уравнение регрессии.

Зависимость, показанная на рис. 5, очевидно, нелинейна. Но это - крайний случай. Далеко не всегда бывает столь же очевидно, что отклонения от регрессионной прямой

имеют неслучайный, закономерный характер. Для оценки степени такой неслучайности необходимо ввести количественную меру.

Поскольку значения  $e$  остаются неизвестными, то проверяется статистическая независимость их аналогов - отклонений  $e_i$ . При этом проверяется обычно их некоррелированность (являющаяся необходимым, но недостаточным атрибутом независимости), причем некоррелированность не любых, а соседних величин  $e_i$ .

Для этих величин можно рассчитать, например, коэффициент корреляции (называемый *коэффициентом автокорреляции первого порядка*):

$$r_{i,i-1} = \frac{\sum_i e_i e_{i-1}}{\sqrt{\sum_i e_i^2 \sum_i e_{i-1}^2}}$$

(считаем, что  $M[e_i] = 0$ ).

Практически, однако, используют тесно связанную с  $r_{i,i-1}$  статистику *Дарбина-Уотсона*, рассчитываемую по формуле:

$$DW = \frac{\sum_i (e_i - e_{i-1})^2}{\sum_i e_i^2}$$

$DW \approx 2(1 - r_{i,i-1})$ . Если  $e_i$  в точности равно  $e_{i-1}$ , то  $DW = 0$ ; если  $e_i = -e_{i-1}$ , то  $DW = 4$ , во всех других случаях  $0 < DW < 4$ .

В случае, когда каждое отклонение  $e_i$  примерно совпадает с предыдущим отклонением  $e_{i-1}$ , каждое слагаемое в числителе величины DW близко к нулю. Сумма квадратов разностей отклонений в числителе будет намного меньше суммы квадратов отклонений в знаменателе, и поэтому статистика Дарбина-Уотсона окажется близкой к нулю. Рис. 5 представляет такой случай - это случай положительной автокорреляции остатков первого порядка. Значение статистики Дарбина-Уотсона здесь равно 0,045, что очень мало и подтверждает статистическую зависимость отклонений  $e_i$  без всяких таблиц. Другой крайний случай возникает, когда точки наблюдений поочередно отклоняются в разные стороны от линии регрессии, и каждое следующее отклонение  $e_i$  имеет, как правило, противоположный знак, чем предыдущее отклонение  $e_{i-1}$ . В этом

случае  $(e_i - e_{i-1}) \approx 2e_i$ , и  $DW \approx \frac{\sum_i (2e_i)^2}{\sum_i e_i^2} = 4 \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i e_i^2} = 4$ . Это - случай отрицательной

автокорреляции остатков первого порядка. Она может встретиться при работе, например, с данными с сезонным характером изменения. Наконец, если характер поведения отклонений случаен, можно предположить, что в половине случаев знак последовательных отклонений совпадает, а в половине - различен. Поскольку абсолютная величина их в среднем предполагается одинаковой, можно считать, что здесь в половине случаев  $e_i$  равно  $e_{i-1}$ , а в оставшейся половине  $e_i$  равно  $-e_{i-1}$ . Итак, при этом

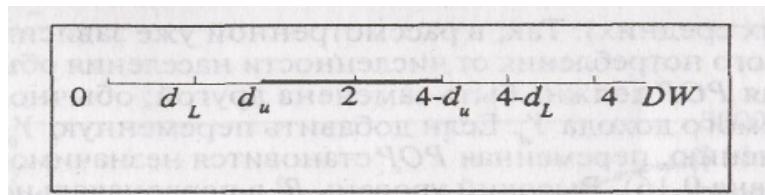
$$DW \approx \frac{\sum_i 0,5 \cdot (2e_i)^2}{\sum_i e_i^2} = 0,5 \cdot 4 \cdot \frac{\sum_i e_i^2}{\sum_i e_i^2} = 2.$$

Это показывает, что близость статистики Дарбина-Уотсона к двум является необходимым условием случайного характера отклонений от линии регрессии. Нужно, однако, иметь в виду, что в показателе сравниваются только соседние отклонения от регрессии, в то же время циклы изменения переменных могут быть более или менее длительными, чем одна единица времени.

Если статистика Дарбина-Уотсона близка к двум, мы считаем отклонения от регрессии случайными (хотя в действительности они могут и не быть таковыми). Это означает, что линейная функция, вероятно, отражает реальную взаимосвязь; скорее всего, не осталось существенных неучтенных факторов, влияющих на зависимую переменную, и какая-либо другая, нелинейная формула не превосходит по статистическим характеристикам данную линейную. Даже если доля дисперсии зависимой переменной, объясненной с помощью регрессии, при этом мала, можно ожидать, что другая часть этой дисперсии, оставшаяся необъясненной, порождена действием множества различных малых факторов и может быть описана как случайная нормальная ошибка. Но как определить, достаточно ли близка величина статистики DW двум? Для этого имеются специальные таблицы, позволяющие при данном числе наблюдений и объясняющих переменных, для заданного уровня значимости, найти критические значения статистики Дарбина-Уотсона.

Итак, статистика Дарбина-Уотсона применяется для проверки гипотезы об отсутствии автокорреляции остатков  $e_i$  первого порядка (нулевой гипотезы). Для этого по таблицам находятся (при данном уровне значимости, числе наблюдений и независимых переменных) доверительные интервалы, в пределах которых нулевая гипотеза принимается, отвергается или не может быть принята или отвергнута.

Важно, что для статистики Дарбина-Уотсона существуют два критических значения, меньшие двух: нижнее  $d_L$  как граница для признания положительной автокорреляции остатков и верхнее  $d_u$  как граница признания ее отсутствия. Для проверки гипотезы об отрицательной автокорреляции остатков эти критические значения отражаются симметрично относительно числа 2:



Например, пусть оценена парная линейная регрессия по 15 наблюдениям, и  $DW = 1,1$ . Зададим уровень значимости 5% и найдем по таблицам  $d_L = 0,95$ ;

$d_u = 1,23$ . Нулевая гипотеза была бы принята при  $d_u = 1,23 < DW < 2,77 = 4 - d_u$  и отвергнута при  $DW < 0,95 = d_L$  или  $DW > 3,05 = 4 - d_L$ . Поскольку в данном случае  $DW$  лежит между  $d_u$  и  $d_L$  нулевая гипотеза не может быть ни принята, ни отвергнута.

Итак, обобщая, если статистика Дарбина-Уотсона составляет 1,5-2,0-2,5, мы хотя и не можем быть абсолютно уверены, что отклонения от линии регрессии взаимно независимы, но обычно удовлетворяемся этим в проверке их независимости.

В случае наличия автокорреляции остатков полученная формула регрессии считается обычно неудовлетворительной. Взглянув на график поведения отклонений  $e_i$ , можно поискать другую (нелинейную) формулу, включить неучтенные до этого факторы, уточнить период проведения расчетов или разбить его на части, либо

применить к данным уменьшающее автокорреляцию остатков преобразование (например, автокорреляционное преобразование или метод скользящих средних).

Высокий уровень  $R^2$  в первоначальном уравнении был обусловлен не тем, что динамика численности населения определяла динамику объема реального потребления, а тем, что обе эти переменные имели выраженную тенденцию (тренды) возрастания в рассматриваемый период.

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Парная регрессия и методы оценки ее параметров.
2. Этапы проверки качества оцененной регрессионной модели.
3. Статистические критерии проверки качества оцененной регрессионной модели.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [6], [16].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Аксиоматика теории вероятностей. Вероятность, условная вероятность. Независимость.
2. Случайные величины и векторы. Элементы корреляционной теории случайных векторов.
3. Точечное и интервальное оценивание параметров распределения.
4. Элементы многомерного статистического анализа.
5. Основные понятия теории статистических решений.
6. Основы теории информации.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [6], [16].

### *Тема: «Теория принятия решений»*

*Основные понятия темы:*теория статистических решений, функция правдоподобия, пространство решений, функция потерь, средний риск, апостериорная плотность вероятности, средний квадрат ошибки, байесовский алгоритм, минимаксный алгоритм, алгоритм максимального правдоподобия

### *Материалы лекций*

*Общая проблема решения. Функция потерь.* Полнота математической модели реальных явлений определяется *априорными данными*, накопленными предыдущим опытом. Для решения задач, в которых математическая вероятностная модель исследуемых процессов полностью определена (известны точно все необходимые по условию задачи распределения вероятностей) мы можем применить методы теории вероятностей и теории случайных процессов. Однако, на практике как правило приходится работать в условиях *априорной неопределенности*, когда вероятностная математическая модель изучаемого явления или процессов, протекающих в системе, неизвестна или определена не полностью. Методы преодоления априорной неопределенности – предмет *математической статистики*. Например, прием сигналов на фоне случайных помех. В таком случае ситуация неопределенности характеризуется

отсутствием сведений о сообщении, которое закодировано в переданном сигнале.

Задачи математической статистики. Пусть исследуется физическое явление, математическую модель которого представляет случайный процесс  $X(t)$  с неполностью известными характеристиками. Относительно неизвестных характеристик модели выдвигаются взаимно несовместимые гипотезы  $H_0, H_1, \dots, H_m$ . Задача проверки *статистических гипотез* состоит в принятии одной из них по результатам наблюдения реализации  $x(t), 0 \leq t \leq T$  случайного процесса  $X(t)$ . Другим видом задач математической статистики является *оценивание неизвестных параметров* распределения вероятностей случайного процесса  $X(t)$  с помощью реализации  $x(t)$  этого процесса, наблюданной на конечном интервале времени  $(0, T)$ .

На практике указанные типы задач рассматриваются раздельно. В общей *теории статистических решений* в таком разделении нет необходимости. На практике необходимо учитывать взаимосвязь обоих видов задач и формулировать эту взаимосвязь как совместную проверку гипотез и оценивание параметров.

*Пространство наблюдений.* Совокупность всех мыслимых реализаций  $x(t)$  наблюданного случайного процесса  $X(t)$  образует пространство наблюдений. В случае аналоговой формы регистрации наблюдений множество  $T$  моментов времени наблюдения (область определения случайного процесса  $X(t)$ ) – континуальное. В этом случае пространство наблюдений – функциональное пространство непрерывных (кусочно-непрерывных) функций. В случае дискретной формы регистрации непрерывная реализация  $x(t)$  подвергается временной дискретизации и тогда множество  $T$  – конечное или счетное. В этом случае при ограниченных длительности наблюдения и интервале дискретизации наблюдение представляется конечно-мерным вектором:

$$x = x_i^n = (x_1, \dots, x_n), x_i = x(t_i), x \in X^n, t_i \in T, i = \overline{1, n}. \quad (1)$$

где  $X^n$  – подмножество  $n$ -мерного евклидового пространства. Вектор  $x$  называют выборкой размера  $n$ , а подмножество  $X^n$  – выборочным пространством.

Если выборочные значения  $x_1, \dots, x_n$  – совокупность независимых случайных величин, то выборку  $x$  называют независимой (случайной), в случае зависимости выборочных значений, выборку  $x$  называют зависимой. Если все элементы независимой выборки подчиняются одному и тому же распределению  $F(x)$ , то выборку  $x$  называют однородной.

При дискретной форме регистрации наблюдений вероятностная мера на пространстве наблюдений представляет совместное конечномерное распределение выборочных значений случайного процесса. Плотность этого распределения называют *функцией правдоподобия выборки*.

Различают два класса функций правдоподобия: параметрический и непараметрический. Функция правдоподобия параметрического класса  $W(\vec{x} | \vec{\theta}), \vec{x} \in \vec{X}^n, \vec{\theta} \in \vec{\Theta}$  при каждом фиксированном векторе параметров  $\vec{\theta}$  представляет известную функцию аргумента  $\vec{x}$ . Априорная неопределенность в этом случае состоит в том, что положение вектора  $\vec{\theta}$  в пространстве параметров  $\vec{\Theta}$  заранее неизвестно. Для непараметрического класса вид функции правдоподобия не задан. Этот класс включает любые неотрицательные нормированные функции  $W(\vec{x})$  выборочных значений  $\vec{x}, \vec{x} \in \vec{X}^n$ .

При аналоговой форме регистрации на пространстве наблюдений задается плотность вероятности меры, абсолютно непрерывной к другой мере.

В условиях параметрической неопределенности возникает вопрос: какова природа параметра  $\vec{\theta}$ , определяющего семейство функций правдоподобия, является ли

этот параметр неизвестной векторной константой или векторной случайной величиной с известной плотностью вероятности  $\omega(\vec{\vartheta})$ , определенной на пространстве параметров  $\vec{\Theta}$ .

Ответ на этот вопрос также относится к априорным данным и любое из двух предположений о полной неопределенности значения параметра в данном параметрическом пространстве или о вероятностном распределении параметра на этом пространстве можно принять за основу при построении теории статистических решений.

В задаче проверки гипотез можно за неизвестный параметр принять номер гипотезы. Задавая априорные вероятности гипотез

$$p_j = P\{H_j\}, j = \overline{0, m}, \sum_{j=0}^m p_j = 1, \quad (2)$$

введем случайный параметр  $\vartheta$ , принимающий целочисленные значения от нуля до  $m$ , с распределением вероятностей (2) и плотностью распределения

$$\omega(\vartheta) = \sum_{j=0}^m p_j \delta(\vartheta - j), \quad (3)$$

где  $\delta(x)$  – дельта-функция.

*Пространство решений и правило выбора решения.* Каждое решение представляет статистический вывод на основе наблюдений. Множество возможных решений образует *пространство решений*  $\Gamma$ . В задачах проверки гипотез множество  $\Gamma$  – конечное, состоящее из элементов  $\gamma_i \in \Gamma, i = \overline{0, m}$ , где  $\gamma_i$  – решение принять гипотезу  $H_i$ . В задачах оценивания параметров пространство решений  $\Gamma$  совпадает с пространством параметров  $\Theta$ , а элементами множества  $\Gamma$  являются оценки неизвестного параметра  $\gamma = \hat{\vartheta} \in \Theta = \Gamma$ .

Как функция  $\gamma(x)$  выборки или как функционал  $\gamma[x(t)]$  от наблюдаемой реализации решение  $\gamma$  является случайной величиной, называемой статистикой.

Каждое правило выбора решения  $\delta$  отображает пространство наблюдений  $X$  на пространстве решений  $\Gamma$ :  $X \xrightarrow{\delta} \Gamma$

В задачах проверки гипотез  $H_j, j = \overline{0, m}$  по выборке  $\bar{x}$  размером  $n$  каждое правило выбора решения  $\delta$  предписывает разделение выборочного пространства  $X^n$  на  $m+1$  непересекающихся областей:

$$X_j \in X^n, j = \overline{0, m}, \bigcup_{j=0}^m X_j = X^n. \quad (4)$$

Если наблюдаемая выборка попала в область  $X_j$ , то принимается решение  $\gamma_j$

$$\delta: x \rightarrow \gamma_j, x \in X_j, \gamma_j \in \Gamma, \delta \in D. \quad (5)$$

Совокупность  $D$  правил выбора решения представляет всевозможные способы разделения выборочного пространства  $X^n$  на  $m+1$  непересекающихся областей.

В задачах оценивания по выборке  $x$  размером  $n$  каждое правило выбора решения устанавливает соответствие между элементами выборочного пространства и пространства решений изоморфному пространству параметров  $\delta: x \rightarrow \hat{\vartheta}, x \in X^n, \hat{\vartheta} \in \Theta, \delta \in D$ .

Правило выбора решения, т.е. алгоритм обработки наблюдений с принятием решения, называют *алгоритмом принятия решения*. Алгоритм принятия решения может быть *одношаговым*, когда решение выдается один раз в результате обработки входных данных за весь фиксированный интервал наблюдений. Также он может быть и

*многошаговым* или *последовательным*, когда длительность интервала наблюдения заранее не фиксируется. Решение может приниматься на любом этапе наблюдения или не выноситься вперед до получения дополнительных данных при продолжении наблюдения.

Плата за принятие решения. Принятие решения по любому правилу на основе одной реализации наблюдаемого случайного процесса не может быть всегда безошибочным. Например, в случае формирования оценки  $\hat{\theta}$  неизвестного параметра  $\theta$  по случайной выборке неизбежны случайные ошибки  $\hat{\theta} - \theta \neq 0$ .

Таким образом, принятие решений связано не только с затратами на обработку наблюдений для получения правильных решений, но и с определенными потерями, если решения оказываются ошибочными. Эти затраты и потери можно учесть, вводя априори так называемую функцию потерь, которая каждой паре утверждений истина – ставит в соответствие неотрицательную величину – плату за принятие решения. Например, в задачах оценивания параметров вводится неотрицательная функция потерь  $P(\hat{\theta}, \theta)$ , зависящая от двух переменных: случайной оценки  $\hat{\theta}$  и оцениваемого параметра  $\theta$ .

*Критерии качества алгоритма принятия решения.* Алгоритму принятия решения всегда предшествует выбор критерия его качества. Использование того или иного критерия качества зависит от полноты располагаемых априорных данных. Критерий качества может быть векторным, если к алгоритму предъявляется несколько требований. Проанализируем несколько критериев качества, каждый из которых соответствует определенному набору располагаемых априорных данных. Будем рассматривать только скалярные критерии качества для дискретно-аналоговых одношаговых алгоритмов принятия решений.

*Критерии качества алгоритма проверки гипотез. Средний риск.* При наличии полного комплекса априорных данных используется критерий среднего риска – среднее значение платы за принятие решения при проверке статистических гипотез. Если выдвигаются  $m+1$  гипотез  $H_j, j = \overline{0, m}$ , то плата за решение представляет дискретную случайную величину  $R$  из  $(m+1)^2$  возможными значениями  $\Pi_{jk}, j, k = \overline{0, m}$  задаваемыми матрицей потерь. Так как  $P\{\Pi = \Pi_{jk}\} = P\{\gamma_k \cap H_j\}$ , то по определению среднего значения дискретной случайной величины находим выражение среднего риска

$$R = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \Pi_{jk} P\{\gamma_k \cap H_j\}.$$

Согласно правилу умножения  $P\{\gamma_k \cap H_j\} = P\{H_j\} P\{\gamma_k | H_j\}$ .

Используя (2) и (5), получаем  $P\{\gamma_k \cap H_j\} = p_j P\{x \in X_k | H_j\}$ , причем

$$P\{x \in X_k | H_j\} = \int_{x_k} W(x | H_j)^2 dx,$$

где  $W(x | H_j)$  – функция правдоподобия выборки  $x$  при условии, что верна гипотеза  $H_j$ .

Тогда выражение среднего риска будет иметь вид:

$$R = \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^m \Pi_{jk} p_j \int_{x_k} W(x | H_j) dx.$$

*Апостериорная вероятность гипотезы.* Если матрица потерь априори не задана, то критерием качества алгоритма принятия решения может служить апостериорная

вероятность гипотезы  $P\{H_j | x\}$  при условии, что наблюдается выборка  $x$ . По, формуле Байеса получаем

$$P\{H_j | x\} = p_j W(x | H_j) / \sum_{i=0}^m p_i W(x | H_i), j = \overline{0, m}.$$

*Вероятность правильного решения.* Другим критерием в условиях априорной неопределенности матрицы потерь является вероятность правильного решения

$$p_{np} = P\left\{\bigcup_{k=0}^m (\gamma_k \cap H_k)\right\} = \sum_{k=0}^m p_k \int_{x_k} W(x | H_k) dx.$$

Вероятность ошибочного решения  $p_{oш} = 1 - p_{np}$ .

Нетрудно убедиться в том, что вероятность ошибки  $p_{oш}$  совпадает с частным значением среднего риска  $R$ , когда платы удовлетворяют условию  $\Pi_{jk} = 1 - \delta_{jk}$ , где  $\delta_{jk}$  – символ Кронекера,  $j, k = \overline{0, m}$ .

Численные значения приведенных критериев качества зависят от принятого правила разбиения выборочного пространства  $X$  на области  $X_j$ ,  $j = \overline{0, m}$ , т. е. от правила выбора решения  $\delta$  (алгоритма проверки гипотез).

*Критерии качества алгоритма оценивания параметров. Средний риск.* Аналогично алгоритму проверки гипотез при наличии полного комплекта априорных данных в задачах оценивания параметров используется критерий среднего риска – среднего значения функции потерь. Если предположить, что оцениваемый параметр представляет векторную случайную величину с известной плотностью вероятности  $\omega(\hat{\vartheta})$ , заданной на пространстве параметров  $\theta$ , то совместная плотность вероятности оцениваемого параметра  $\hat{\vartheta}$  и выборки  $x$ , которая используется для оценки  $\hat{\vartheta}(x), W(\vartheta, x) = \omega(\vartheta)W(x | \vartheta)$ ,  $\vartheta \in \theta^m, x \in X^n$ . Тогда среднее значение потерь  $\Pi[\hat{\vartheta}(x), \vartheta]$  как функции от совокупности случайных величин  $\vartheta, \hat{\vartheta}(x)$

$$R = m_1 \left\{ \Pi(\hat{\vartheta}, \vartheta) \right\} = \int_{X^n} \int_{\theta^m} \Pi[\hat{\vartheta}(x), \vartheta] \omega(\vartheta) W(x | \vartheta) d\vartheta dx. \quad (6)$$

*Апостериорная плотность вероятности.* Если функция потерь не задана, то критерием качества может служить какая-либо числовая характеристика, (мода, среднее) апостериорной плотности вероятности  $W(\vartheta | x)$  параметра  $\vartheta$  при условии, что наблюдается выборка  $x$ . По формуле Байеса получаем

$$W(\vartheta | x) = \omega(\vartheta) W(x | \vartheta) / \int_{\theta^m} \omega(\vartheta) W(x | \vartheta) d\vartheta. \quad (7)$$

*Средний квадрат ошибки.* Часто используется как критерий качества алгоритма оценивания средний квадрат ошибки  $\varepsilon = \hat{\vartheta} - \vartheta$

$$m_1 \{ \varepsilon^2 \} = m_1 \left\{ [\hat{\vartheta}(x) - \vartheta]^2 \right\}.$$

Ясно, что значение среднего квадрата ошибки совпадает с частным значением среднего риска  $R$  при квадратичной функции потерь  $\Pi(\hat{\vartheta}, \vartheta) = (\hat{\vartheta} - \vartheta)^2 = \varepsilon^2$ .

#### *Байесовский и минимаксный подходы*

В отличие от эвристического решения оптимальный алгоритм принятия решения устанавливается до наблюдения по заданному критерию качества. Задание критерия качества обусловлено априорными данными. В свою очередь отсутствие необходимых

априорных данных ведет к отказу от одних критериев оптимальности и к принятию других.

*Байесовский подход (байесовские алгоритмы).* Оптимальный алгоритм принятия решения  $\delta_\theta$  называется *байесовским*, если при его использовании достигается минимальное значение (нижняя граница) среднего риска

$$R_{\delta_\theta} = \min_{\delta \in D} R_\delta \quad (8)$$

$$\text{или } \delta_\theta = \arg \min_{\delta \in D} R_\delta.$$

Поэтому байесовский алгоритм называют оптимальным по критерию минимума среднего риска. Решение  $\gamma_\theta(x)$ , принимаемое согласно этому алгоритму при наблюдении выборки  $x$ , называют *байесовским*.

Задача статистического синтеза байесовского алгоритма проверки гипотез состоит в определении такого разделения выборочного пространства  $X^n$  на непересекающиеся области  $X_j, j = \overline{0, m}$ , которое удовлетворяет условию (8).

Задача статистического синтеза байесовского алгоритма оценивания параметра  $\theta \in \Theta$  состоит в определении оценки  $\hat{\theta}_\theta(x) \in \Theta$ , которая удовлетворяет условию (8).

Заметим, что из (6) и (7) следует

$$R = \int_{X^n} W(x) \int_{\Theta^m} \Pi[\hat{\theta}(x), \theta] W(\theta | x) d\theta dx,$$

$$\text{где } W(x) = \int_{\Theta^m} \omega(\theta) W(x | \theta) d\theta.$$

Функционал  $J\{\hat{\theta}(x), x\} = \int_{\Theta^m} \Pi[\theta(x), \theta] W(\theta | x) d\theta$  называется апостериорным

риском, так как представляет усредненную по апостериорной плотности  $W(\theta | x)$  плату за ошибки при оценивании параметра  $\theta$ .

Ввиду того, что  $W(x) \geq 0$ , для выпуклой положительной функции потерь оценка, минимизирующая апостериорный риск, минимизирует и средний риск  $R$ , т. е. является байесовской.

*Минимаксный подход (минимаксные алгоритмы).* Предположим, что в задаче проверки гипотез априорное распределение  $p_0, p_1, \dots, p_m$  неизвестно. В этом случае можно определить  $m+1$  условных рисков

$$r_j = \sum_{k=0}^m \Pi_{jk} \int_{X_k} W(x | H_j) dx, j = \overline{0, m}.$$

В этих условиях априорной неопределенности можно использовать *критерий минимакса*, согласно которому алгоритм принятия решения (правило разделения выборочного пространства на непересекающиеся области) является оптимальным, если при его использовании минимизируется максимальный из условных рисков. В литературе доказано, что минимаксный алгоритм совпадает с байесовским для наименее благоприятного априорного распределения гипотез

$$\min_{\delta \in D} \max_{0 \leq j \leq m} r_j = \max_{0 \leq j \leq m} \min_{\delta \in D} R$$

Для аналогичной ситуации в задаче оценивания параметра  $\theta$ , когда априорная плотность вероятности неизвестна, можно определить функцию условного риска

$$r_{\hat{\theta}}(\theta) = \int_{X^n} \Pi[\hat{\theta}(x), \theta] W(x | \theta) dx, \theta \in \Theta^m.$$

В этом случае оптимальность может основываться на минимаксном критерии, согласно которому наилучшей является минимаксная оценка  $\hat{\theta}_{mm}$ , для которой верхняя граница значений функции  $r(\theta)$  не превосходит верхних значений этой функции при любых других оценках:

$$\max_{\theta \in \Theta^m} r_{\hat{\theta}_{mm}}(\theta) \leq \max_{\theta \in \Theta^m} r_{\hat{\theta}_{mm}}(\theta), \hat{\theta} \in \Theta^m.$$

Как и в задаче проверки гипотез, минимаксный алгоритм оценивания совпадает с байесовским для наименее благоприятного априорного распределения оцениваемого параметра.

#### *Метод максимального правдоподобия*

*Алгоритмы максимальной апостериорной вероятности и максимальной апостериорной плотности вероятности.* Пусть в задаче проверки гипотез матрица потерь неизвестна. В этом случае используя формулу апостериорной вероятности гипотез можно определить апостериорные вероятности гипотез  $P\{H_j | x\}, j = \overline{0, m}$ .

Алгоритм  $\delta_{man}$  проверки гипотез называется *оптимальным по критерию максимальной апостериорной вероятности*, если при его использовании принимается решение  $\gamma_k$ , когда

$$P\{H_k | x\} = \max_{1 \leq j \leq m} P\{H_j | x\}, x \in X_k.$$

В аналогичной ситуации в задаче оценивания параметра  $\theta$ , когда неизвестна функция потерь, можно определить апостериорную плотность вероятности параметра  $W(\theta | x)$ . Оценка  $\hat{\theta}_{man}$  называется оценкой максимальной апостериорной плотности вероятности оцениваемого параметра, если

$$\hat{\theta}_{man} = \arg \max_{\theta \in \Theta^m} W(\theta | x), x \in X^n.$$

*Алгоритм максимального правдоподобия.* Если в задаче проверки гипотез неизвестны и априорное распределение гипотез, и матрица потерь, то выбор оптимального алгоритма может основываться только на функции правдоподобия. Оптимальный алгоритм проверки гипотез  $\delta_{mn}$  называется алгоритмом максимального правдоподобия, если при его использовании

$$W(x | H_k) = \max_{0 \leq j \leq m} W(x | H_j), x \in X_k.$$

В аналогичной ситуации в задаче оценивания параметра  $\theta$ , когда неизвестны априорная плотность  $\omega(\theta)$  и функция потерь, оптимальная оценка  $\hat{\theta}_{mn}$  называется оценкой максимального правдоподобия, если

$$\hat{\theta}_{mn} = \arg \max_{\theta \in \Theta^m} W(x | \theta), x \in X^n.$$

#### *Вопросы для самоконтроля:*

1. Задачи теории статистических решений.
2. Алгоритм принятия решений и его виды.
3. Критерии качества принятия решений.
4. Байесовский алгоритм принятия решений.

5. Минимаксный алгоритм принятия решений
6. Алгоритм максимального правдоподобия.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [6], [16].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Метод последовательного принятия решения.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [6], [16].

## Раздел 2. Методы математического моделирования

*Тема: «Основные принципы математического моделирования»*

*Основные понятия темы:* фундаментальные законы природы, закон сохранения энергии, закон сохранения импульса, вариационные принципы, формализм Гамильтона, модели авторегрессии-проинтегрированного скользящего среднего, автокорреляционная функция, частная автокорреляционная функция, уравнения Юла-Уокера, оценки максимального правдоподобия

### Материалы лекций

*Методы построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы. Элементарные математические модели в механике, гидродинамике, электродинамике. Вариационные принципы построения математических моделей*

Получение многих математических моделей как технических, так и нетехнических систем основывается на применении фундаментальных законов природы, вариационных принципов, принципов аналогий. К числу фундаментальных следует отнести различные законы сохранения, например: энергии, массы вещества, импульса, момента импульса, заряда (электрического и барионного). Законы сохранения представляют собой условия постоянства некоторых функционалов на возможных движениях системы. Например, согласно теореме закон сохранения энергии является следствием однородности времени, т. е. независимости законов движения системы от выбора начала отсчета времени. Наряду с законами сохранения большое распространение, особенно в механике, получили *вариационные принципы*, основанные на формализме Лагранжа (Lagrange) и Гамильтона (Hamilton). Рассмотрим некоторые подходы к построению простейших математических моделей, иллюстрирующие применение фундаментальных законов природы и вариационных принципов.

*Фундаментальные законы природы.* Наиболее распространенный метод построения моделей состоит в применении фундаментальных законов природы к конкретной ситуации. Эти законы общепризнаны и служат основой множества научно-технических достижений.

*Сохранение энергии.* Применение данного закона рассмотрим на следующем примере. Пусть необходимо определить скорость револьверной пули с помощью устройства типа маятник-груз, подвешенном на легком жестком и свободно вращающемся стержне (рис. 1). Пуля, застрявшая в грузе, сообщает системе «пуля-груз» свою кинетическую энергию, которая в момент наибольшего отклонения стержня от

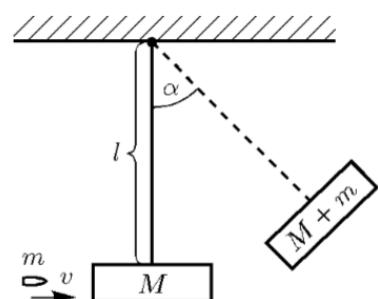


Рис. 1

вертикали полностью перейдет в потенциальную энергию системы.

Запишем это в виде:

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha).$$

где  $\frac{mv^2}{2}$  – кинетическая энергия пули массы  $m$ , имеющей скорость  $v$ ,  $M$  –

масса груза,  $V$  – скорость системы «пуля-груз» сразу после столкновения,  $g$  – ускорение свободного падения,  $l$  – длина стержня,  $\alpha$  – угол наибольшего отклонения.

Тогда мы можем найти скорость пули в виде:

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}.$$

Таким образом, построенная модель дает приближенное решение задачи, так как не учитывает потери энергии на разогрев пули и груза, на преодоление сопротивления воздуха, на разгон стержня и т.д. (правда они невелики). Закон сохранения механической энергии гласит, что сохраняется полная, а не механическая энергия системы. Поэтому принимая во внимание, что процессы, происходящие при «слипании» пули и маятника, уже не являются чисто механическими, применяемый для вычисления скорости пули закон сохранения энергии несправедлив. Он дает нижнюю оценку для скорости пули, так как он учитывает, что сохраняется механическая, а не полная энергия. Для более точного решения этой задачи надо воспользоваться законом сохранения импульса: импульс системы до соударения и после соударения одинаков, то есть  $mV = (M+m)v^2$ . Вопрос о соответствии объекта и его модели – один из центральных в математическом моделировании.

*Модель механической системы на основе уравнений Ньютона.* Рассмотрим получение более сложных математических моделей на основе законов Ньютона для описания механических систем. Математическая модель механической системы может быть представлена с помощью уравнения *второго закона Ньютона*, который полностью характеризует динамику системы. Предполагается, что исследуемая система состоит из совокупности  $N$  материальных точек, которые находятся под действием каких-либо сил:

$$m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (1)$$

где  $m_i$  – масса  $i$ -й материальной точки;  $\vec{r}_i$  – радиус-вектор этой точки, проведённый из начала выбранной системы координат;  $\vec{F}_i = \vec{F}_i(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$  – результирующая всех сил, приложенных к  $i$ -й точке, величины  $\vec{F}_i$  считаются заданными.

Если представить уравнение движения в координатной форме записи и задать начальные координаты  $x_i(t_0), y_i(t_0), z_i(t_0), i = 1, \dots, N$  точек и их скорости  $\dot{x}_i(t_0), \dot{y}_i(t_0), \dot{z}_i(t_0)$  начальный момент времени  $t = t_0$ , то по заданной модели (1) возможно определение координат точек и их скоростей в любой момент времени  $t > t_0$ .

Рассматриваемая математическая модель (1) поведения системы справедлива для инерциальной или галилеевой системы отсчёта, в которой свободная материальная точка движется равномерно и прямолинейно. Иначе можно сказать, что в этой системе отсчёта выполняется *первый закон Ньютона* – скорость свободной материальной точки не меняется во время её движения.

С позиций классической механики все инерциальные системы равноправны. Это утверждение означает, что все законы и уравнения механики, установленные для замкнутой системы в какой-либо инерциальной системе отсчёта, не изменяются при переходе к любой другой инерциальной системе отсчёта.

Множество инерциальных систем, «порождаемое» исходной системой отсчёта  $x, y, z, t$ , характеризуется следующими преобразованиями координат и времени.

$$1. \quad x_* = x + a, \quad y_* = y + b, \quad z_* = z + c, \quad t_* = t,$$

где  $a, b, c$  – произвольные постоянные.

Данное преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при сдвигах систем отсчёта. Это следует как следствие из предположения об *однородности пространства*, т. е. отсутствия преимущественных точек пространства.

$$2. \quad x_* = x, \quad y_* = y, \quad z_* = z, \quad t_* = t + h,$$

где  $h$  – постоянная.

Такое преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при сдвиге по оси времени, что следует из предположения *об однородности времени*. При этом отсутствует преимущество какого-либо выбора начала отсчёта времени.

$$3. \quad x_* = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad y_* = -x \sin \alpha + y \cos \alpha, \quad z_* = z, \quad t_* = t.$$

где  $\alpha$  – угол поворота системы отсчета относительно одной из осей координат

Приведённое преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при поворотах систем отсчёта относительно любой из осей координат. В рассматриваемом случае – это поворот вокруг оси  $z$  на угол  $\alpha$ . Утверждение следует из предположения об *изотропности пространства*, т. е. отсутствия в нём преимущественных направлений.

$$4. \quad x_* = x - v_x t, \quad y_* = y - v_y t, \quad z_* = z - v_z t, \quad t_* = t,$$

где  $v_x, v_y, v_z$  – постоянные, характеризующие скорости относительно соответствующих координат.

Рассматриваемое преобразование означает, что законы и уравнения механики не изменяются при переходе к системе отсчёта, движущейся равномерно и поступательно относительно исходной. Это преобразование получило название преобразований Галилея.

В тех случаях, когда уравнения механики не меняются при некоторых преобразованиях систем отсчёта, говорят, что эти уравнения *инвариантны* по отношению к этим преобразованиям, если они удовлетворяют следующим двум условиям.

1. В результате преобразований структура уравнений не меняется.

2. В результате преобразований все функции от координат, скоростей и ускорений, которые содержатся в уравнениях (ими являются силы, энергия, количество движения и другие механические величины), не меняются.

В тех случаях, когда в результате преобразований 1–4 не происходит изменения структуры уравнений (*условие 1*), однако вид функций, зависящих от координат и скоростей (определяющих силу, энергию, количество движения и т. д.), не сохраняется

(условие 2), говорят, что форма записи уравнений механики *ковариантна* по отношению к указанным преобразованиям в классе инерциальных моделей.

*Вариационные принципы построения математических моделей.* Вариационные принципы представляют собой достаточно общие утверждения об изучаемой системе (объекте, явлении) и гласят, что из всех возможных вариантов её поведения (движения, эволюции) выбираются лишь те, которые удовлетворяют определённому условию. Согласно этим принципам некоторая, связанная с системой величина (обычно функционал), достигает своего экстремального значения при переходе системы из одного состояния в другое. Рассмотрим упрощенную формулировку *вариационного принципа Гамильтона* для механической системы.

*Общая схема принципа Гамильтона.* Пусть имеется механическая система, все элементы которой и взаимодействия между ними определяются законами механики (например, система «шарик-пружина»). Введем понятие обобщенных координат  $Q(t)$ , полностью определяющих положение механической системы в пространстве. Величина  $Q(t)$  может быть декартовой координатой, радиус-вектором, угловой координатой, набором координат материальных точек, составляющих систему и т.д. Величину  $dQ/dt$  естественно назвать обобщенной скоростью механической системы в момент времени  $t$ . Набор величин  $Q(t)$  и  $dQ/dt$  определяет состояние механической системы во все моменты времени.

Для описания механической системы вводится функция Лагранжа в виде:

$$L(Q, dQ/dt) = E_{\text{к}} - E_{\text{п}}, \quad (2)$$

где  $E_{\text{к}}$ ,  $E_{\text{п}}$  – кинетическая и потенциальная энергии системы соответственно.

Введем далее величину  $S[Q]$ , называемую действием:

$$S[Q] = \int_{t_1}^{t_2} L\left(Q, \frac{dQ}{dt}\right) dt. \quad (3)$$

Интеграл (3) – функционал от обобщенной координаты  $Q(t)$ , т.е. функции  $Q(t)$ , заданной на отрезке  $[t_1, t_2]$ , он ставит в соответствие некоторое число  $S$  (действие).

*Принцип Гамильтона для механической системы* гласит: если система движется по законам механики, то  $Q(t)$  – стационарная функция для  $S[Q]$ , или

$$\frac{d}{d\epsilon} S[Q + \epsilon\varphi]_{\epsilon=0} = 0. \quad (4)$$

Введенная в принципе наименьшего действия (4) функция  $\varphi(t)$  – некоторая пробная функция, обращающаяся в ноль в моменты  $t_1, t_2$  и удовлетворяющая тому условию, что  $Q(t) + \epsilon\varphi(t)$  – возможная координата данной системы (в остальном  $\varphi(t)$  произвольна).

Смысл принципа (4) в том, что из всех априори допустимых траекторий (движения) системы между моментами  $t_1, t_2$  выбирается движение, доставляющее минимум функционалу действия. Функция  $\epsilon\varphi(t)$  называется вариацией  $Q(t)$ .

Таким образом, *схема применения принципа Гамильтона* (4) для построения моделей механических систем состоит в следующем:

1. определяются обобщенные координаты  $Q(t)$  и обобщенные скорости

$dQ(t)/dt$  системы;

2. строится функция Лагранжа  $L(Q, dQ/dt)$  и функционал действия  $S[Q]$ , минимизация которого на вариациях  $\epsilon\phi(t)$  координаты  $Q(t)$  и дает исковую модель.

*Типовые математические схемы построения математических моделей.* Исходной информацией при построении математических моделей объектов (процессов, систем) служат априорные данные о назначении и свойствах исследуемого объекта. Эта информация определяет основную цель моделирования и позволяет сформулировать требования к разрабатываемой математической модели. Причем уровень абстрагирования зависит от круга тех вопросов, на которые исследователь хочет получить ответ с помощью модели, и в какой-то степени определяет выбор математической схемы. Математическую схему можно определить как звено при переходе от содержательного к формальному описанию объекта с учетом воздействия внешней среды, т. е. имеет место цепочка «описательная модель – математическая схема – математическая [аналитическая или (и) имитационная] модель».

На первоначальных этапах исследования объекта рациональнее использовать *типовые математические схемы*: дифференциальные уравнения, конечные и вероятностные автоматы, системы массового обслуживания, сети Петри и т. д. В качестве *детерминированных моделей* (случайные факторы не учитываются) для описания объектов, функционирующих в *непрерывном времени*, как правило, используются дифференциальные и интегральные уравнения (*непрерывно-детерминированный подход*), а для представления систем, функционирующих в *дискретном времени* – конечные автоматы и конечно-разностные схемы (*дискретно-детерминированный подход*). В качестве *стохастических моделей* (при учете случайных факторов) для описания объектов с *дискретным временем* в большинстве случаев используются вероятностные автоматы, методы авторегрессии-пронтегрированного скользящего среднего (*дискретно-стохастический подход*), а для представления объектов с *непрерывным временем* – системы массового обслуживания (*непрерывно-стохастический подход*) и т. д.

### *Методы построения стохастических моделей*

*Стохастической моделью* будем называть модель, описывающую вероятностную структуру последовательности наблюдений. Важным классом стохастических моделей являются модели, описывающие стационарные процессы. Частным случаем *стационарных стохастических процессов* являются процессы авторегрессии (AP), скользящего среднего (CC), смешанные процессы авторегрессии-скользящего среднего (APCC).

*Виды моделей.* Процесс авторегрессии  $p$ -го порядка (AP( $p$ )) имеет вид

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \phi_2 \tilde{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} \quad (5)$$

где  $\tilde{z}_t = z_t - \mu$  – отклонение процесса от некоторого начального уровня, а в случае стационарности процесса, от своего среднего значения;  $\phi_1 \dots \phi_p$  – параметры модели.

Используя оператор  $Bz_t = z_{t-1}$ ,  $B^j z_t = z_{t-j}$  (5) можно записать:

$$(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p) \tilde{z}_t = a_t.$$

Условие стационарности процесса AP( $p$ ) следующее: корни уравнения  $\phi(B) = 0$  должны лежать вне единичного круга.

Процесс скользящего порядка  $q$  (CC( $q$ )) имеет вид

$$\tilde{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

или

$$\tilde{z}_t = (1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q) a_t \quad (6)$$

где  $\theta_1, \dots, \theta_q$  - параметры модели.

Процесс  $CC(q)$  является стационарным без каких-либо ограничений на параметры. Условие обратимости процесса требует, чтобы корни уравнения  $\theta(B) = 0$  лежали вне единичного круга.

Для получения экономичной параметризации на практике иногда бывает необходимо включать в модель как члены, описывающие авторегрессию, так и члены, моделирующие скользящее среднее:

$$\tilde{z}_t = \phi_1 \tilde{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \tilde{z}_{t-p} - a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

или

$$\phi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t. \quad (7)$$

Соотношение (6) носит название *смешанного процесса авторегрессии – скользящего среднего порядка* ( $p, q$ ) (APCC( $p, q$ )).

При этом  $\phi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t$  определяет стационарный процесс при условии, что все корни уравнения  $\phi(B) = 0$  лежат вне единичного круга. Для обратимости рассматриваемого процесса корни уравнения  $\theta(B) = 0$  должны лежать вне единичного круга.

Процессы, в которых  $d$ -я разность есть стационарный смешанный процесс авторегрессии – скользящего среднего, называются процессами *авторегрессии – проинтегрированного скользящего среднего* (АРПСС). Соответствующие модели очень важны, т.к. позволяют описывать однородные нестационарные временные ряды.

Пусть

$$\phi(B) \tilde{z}_t = \theta(B) a_t, \quad (8)$$

где  $\phi(B)$  – нестационарный оператор авторегрессии, такой, что  $d$  корней уравнения  $\phi(B) = 0$  равны единице, а остальные лежат вне единичного круга.

Модель (8) можно представить в виде  $\phi(B) \tilde{z}_t = \phi(B)(1 - B)^d \tilde{z}_t = \theta(B) a_t$ , где  $\phi(B)$  – стационарный оператор авторегрессии.

Имеем представление процесса АРПСС

$$\phi(B) \nabla z_t = \theta(B) a_t. \quad (9)$$

$$\text{где } \nabla z_t = z_t - z_{t-1}.$$

*Этапы идентификации моделей.* На этапе идентификации ставится задача определения подходящего подкласса моделей из общего семейства моделей АРПСС, который может быть использован для описания временного ряда. Для решения поставленной задачи необходимо:

- 1) определить порядок разности  $d$ , обеспечивающий стационарность процесса;
- 2) идентифицировать результирующий процесс АРСС.

Основным инструментом для реализации 1 и 2, как правило, являются *автокорреляционная* (АКФ) и *частная автокорреляционная функция* (ЧАКФ). Для стационарной модели, у которой ни один из корней не лежит близко к границе единичного круга АКФ быстро затухает. Поэтому отсутствие у АКФ тенденции к

затуханию можно истолковать в том смысле, что процесс  $z_t$  ведет себя нестационарно, хотя, возможно, его разность  $\nabla^d z_t$  стационарна. Считается, что необходимая для получения стационарности степень разности  $d$  достигнута, если АКФ ряда  $\omega_t = \nabla^d z_t$  быстро затухает.

Теоретическая автокорреляционная функция  $\{\rho_k\}$  описывает математически определенный стохастический процесс. На практике же имеем конечный временной ряд  $z_1, z_2, \dots, z_N$  из  $N$  наблюдений, по которому можно найти только *выборочные оценки* автокорреляций  $r_k$ . Наиболее удовлетворительной оценкой автокорреляции  $\rho_k$  при задержке  $k$  является

$$r_k = \frac{c_k}{c_0},$$

где  $c_k$  – выборочная оценка автоковариации  $\gamma_k$ ,

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t+k} - \bar{z}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, K,$$

где  $\bar{z}$  – выборочное среднее временного ряда,  $\bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t$ .

На практике для получения полезной оценки АКФ необходимо по меньшей мере 50 наблюдений, и выборочные автокорреляции  $r_k$  должны быть вычислены для  $k = 0, 1, 2, \dots, K$ , где  $K$  не больше чем примерно  $N / 4$ .

*Автокорреляционная функция процессов AP(p).* Автокорреляционная функция процесса  $AP(p)$  удовлетворяет уравнению:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p}, \quad k > 0 \quad (10)$$

или  $\phi(B) \rho_k = 0$ , где  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_p B^p$ .

В общем, *автокорреляционная функция стационарного процесса авторегрессии* состоит из совокупности затухающих экспонент и затухающих синусоид.

Из (10) для разных  $k = 1, 2, 3, \dots, p$  получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} \rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \dots + \phi_p \rho_{p-1} \\ \rho_2 = \phi_1 \rho_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p \rho_{p-2} \\ \dots \\ \rho_p = \phi_1 \rho_{p-1} + \phi_2 \rho_{p-2} + \dots + \phi_p \end{cases} \quad (11)$$

Эти уравнения называют *уравнения Юла-Уокера*. Если заменить теоретическое значения автокорреляции  $\rho_k$  выборочными  $r_k$ , то из (11) можно получить параметры модели (оценки Юла-Уокера):

$$\hat{\phi} = P_p^{-1} r_p, \quad (12)$$

$$\text{где } \hat{\phi} = \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \dots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix}, \quad r_p = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \dots \\ r_p \end{pmatrix}, \quad P_p = \begin{bmatrix} 1 & r_1 & r_2 \dots r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 \dots r_{p-2} \\ \dots & \dots & \dots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} \dots 1 \end{bmatrix}$$

Решая уравнение (12) последовательно для  $k = 1, 2, 3, \dots$ , получаем

$$\phi_{11} = \rho_1$$

$$\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2} \quad \text{и т.д.}$$

Величина  $\phi_{kn}$ , рассматриваемая как функция задержки  $k$ , называется *функцией частной автокорреляции*(ЧАКФ). ЧАКФ помогает определить каков порядок процесса авторегрессии. Для процесса авторегрессии порядка  $p$  частная автокорреляционная функция  $\phi_{kn}$  будет ненулевой для  $k \leq p$  и нулем для  $k > p$ .

*Автокорреляционная функция процессов  $CC(q)$ .* Автокорреляционная функция процесса  $CC(q)$  имеет вид

$$\rho_k = \begin{cases} \frac{-\theta_k + \theta_1\theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k}\theta_q}{1 + \theta_1^2 + \dots + \theta_q^2}, & k = \overline{1, q} \\ 0, & k > q \end{cases}, \quad (13)$$

т.о. автокорреляционная функция процесса  $CC(q)$  обрывается на задержке  $q$ .

Если  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_q$  известны,  $q$  уравнений (13) можно разрешить относительно параметров  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ . Но, к сожалению, в отличии от уравнений Юла-Уокера, они нелинейные и решаются итеративно. Подставляя в (13) вместо  $\rho_k$  их оценки и решая полученные уравнения можно найти начальные оценки параметров скользящего среднего.

*Автокорреляционная функция процессов  $APCC(p,q)$ .* АКФ смешанного процесса авторегрессии-скользящего среднего имеет вид:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + \dots + \phi_p\rho_{k-p}, \quad k \geq q+1$$

или

$$\phi(B)\rho_k = 0, \quad k \geq q+1$$

Т.е. для процесса  $APCC(p,q)$  существует  $q$  автокорреляций  $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_1$ , значения которых связаны зависимостью с  $q$  параметрами СС и  $p$  параметрами АР. Далее,  $p$  значений  $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{q-p+1}$  необходимы как начальные значения для решения разностного уравнения  $\phi(B)\rho_k = 0, \quad k \geq q+1$  полностью определяющего автокорреляции при больших задержках.

Свойства теоретических автокорреляционной и частной автокорреляционной функций для  $d$ -й разности процесса  $APCC(p, d, q)$  сведены в табл. 1. АКФ процесса  $AP(p)$  спадает плавно, а ее ЧАКФ имеет обрыв после  $p$ -й задержки. Обратно, АКФ процесса  $CC(q)$  обрывается после задержки  $q$ , а ее ЧАКФ спадает плавно с ростом задержки. АКФ смешанного процесса  $APCC(p, q)$  после первых  $q-p$  задержек представляется в виде суммы экспонент и затухающих синусоид, а ее ЧАКФ после  $p-q$  задержек представляется в виде суммы экспонент и затухающих синусоид.

Таблица 1 - Поведение автокорреляционных функций для d-й разности процесса ARПСС ( $p, d, q$ )

Порядок	(1, d, 0)	(0, d, 1)	(2, d, 0)	(0, d, 2)	(1,d,1)
Поведение $\rho_k$	Экспоненциально затухают	Только $\rho_1 \neq 0$	Наложение экспонент и затухающих синусоид	Только $\rho_1 \neq 0, \rho_2 \neq 0$	Экспоненциально затухают, начиная с первой задержки
Поведение $\phi_{kk}$	Только $\phi_{11} \neq 0$	Доминирует экспоненциальное затухание	Только $\phi_{11} \neq 0, \phi_{22} \neq 0$	Доминирует наложение экспонент и затухающих синусоид	С первой задержки доминирует экспоненциальное затухание
Предварительные оценки	$\phi_1 = \rho_1$	$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2}$	$\phi_1 = \frac{\rho_1(1 - \rho_2)}{1 - \rho_1^2}$ $\phi_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1^2}{1 - \rho_1^2}$	$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$ $\rho_2 = \frac{-\theta_2}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2}$	$\rho_1 = \frac{(1 - \theta_1\phi_1)(\phi_1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}$ $\rho_2 = \rho_1\phi_1$
Допустимый диапазон	$-1 < \phi_1 < 1$	$-1 < \theta_1 < 1$	$-1 < \phi_2 < 1$ $\phi_2 + \phi_1 < 1$ $\phi_2 - \phi_1 < 1$	$-1 < \theta_2 < 1$ $\theta_2 + \theta_1 < 1$ $\theta_2 - \theta_1 < 1$	$-1 < \phi_1 < 1$ $-1 < \theta_1 < 1$

*Начальные оценки параметров моделей из класса ARПСС.* Начальные оценки для процессов авторегрессии можно получить, заменив теоретические автокорреляции  $\rho_k$  в (11) их выборочными оценками  $r_k$ . В частности, в табл. 1 представлены начальные оценки параметров моделей AP(1) и AP(2). Также начальные оценки параметров процесса AP(2) могут быть найдены с помощью рис.2.

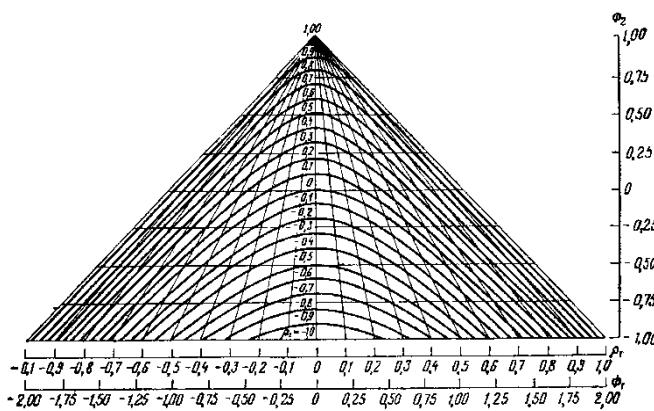


Рис.2 – Диаграмма связи  $\rho_1, \rho_2$  с  $\phi_1, \phi_2$  для процесса AP(2)

Начальные оценки для *процессов скользящего среднего* можно получить, подставив в (12)  $r_k$  вместо  $\rho_k$  и решив получающиеся нелинейные уравнения. В табл. 2 представлены начальные оценки параметров моделей СС(1) и СС(2). Табл. 2 и рис. 3 связывают  $\rho_1$  и  $\theta_1$  и  $\rho_1, \rho_2$  с  $\theta_1, \theta_2$  соответственно и после подстановки теоретических автокорреляций их выборочными оценками могут быть получены начальные оценки параметров процессов СС(1) (табл. 2), СС(2) (рис. 3).

Таблица 2 - Таблица связи  $\rho_1$  и  $\theta$  для процесса СС(1)

$\theta$	$\rho_1$	$\theta$	$\rho_1$
0.00	0.000	0.00	0.000
0.05	-0.050	-0.05	0.050
0.10	-0.099	-0.10	0.099
0.15	-0.147	-0.15	0.147
0.20	-0.192	-0.20	0.192
0.25	-0.235	-0.25	0.235
0.30	-0.275	-0.30	0.275
0.35	-0.315	-0.35	0.315
0.40	-0.349	-0.40	0.349
0.45	-0.374	-0.45	0.374
0.50	-0.400	-0.50	0.400
0.55	-0.422	-0.55	0.422
0.60	-0.441	-0.60	0.441
0.65	-0.457	-0.65	0.457
0.70	-0.468	-0.70	0.468
0.75	-0.480	-0.75	0.480
0.80	-0.488	-0.80	0.488
0.85	-0.493	-0.85	0.493
0.90	-0.497	-0.90	0.497
0.95	-0.499	-0.95	0.499
1.00	-0.500	-1.00	0.500

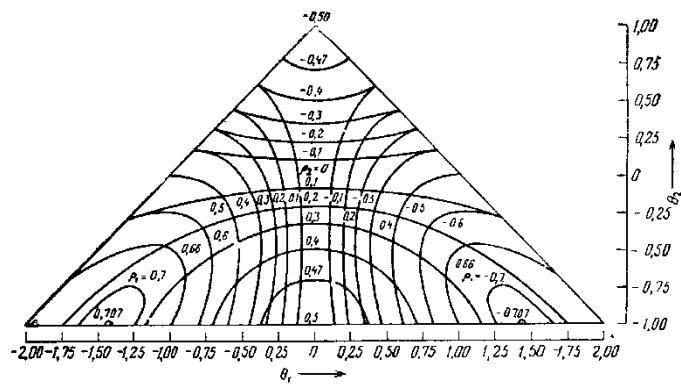


Рис. 4 – Диаграмма связи  $\rho_1, \rho_2$  с  $\theta_1, \theta_2$  для процесса CC(2)

Начальные оценки смешанного процесса авторегрессии-скользящего среднего. Учитывая, что автоковариационная функция процесса APCC имеет вид:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2, \\ \gamma_1 &= \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 - \phi_1^2} \sigma_a^2, \\ \gamma_k &= \phi_1\gamma_{k-1}, k \geq 2.\end{aligned}$$

Можно выразить две первые автокорреляции через параметры процесса в виде:

$$\begin{aligned}\rho_1 &= \frac{(1 - \phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1 + \theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1}, \quad (14) \\ \rho_2 &= \phi_1\rho_1.\end{aligned}$$

Подставляя в (14)  $r_k$  вместо  $\rho_k$  и решая полученные уравнения, могут быть найдены начальные оценки параметров  $\phi_1, \theta_1$ . Представленная на рис. 5 диаграмма также позволяет получить начальные оценки  $\phi_1, \theta_1$  по известным  $r_1, r_2$ .

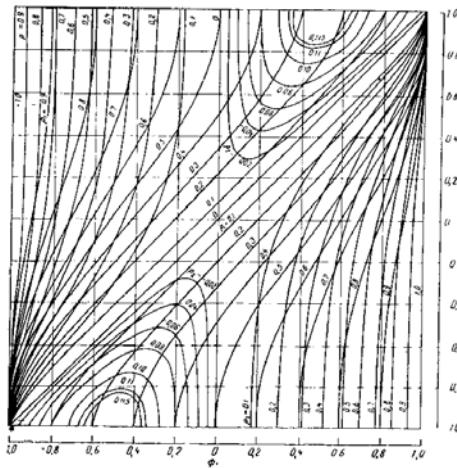


Рис. 5 – Диаграмма связи  $\rho_1, \rho_2$  с  $\phi_1, \theta_1$  для процесса APCC(1,d,1)

*Оценивание модели на основе функции правдоподобия. Условное правдоподобие.* После получения пробного варианта модели и начальных оценок параметров необходимо получить эффективные оценки параметров. Один из методов оценок параметров стохастической модели - исследование функции правдоподобия.

Полученные на основе данного метода оценки называются *оценками максимального правдоподобия*.

Пусть  $N = n + d$  исходных наблюдений  $\vec{z}$  образуют временной ряд  $z_{-d+1}, \dots, z_0, z_1, z_2, \dots, z_n$ . Предположим, что этот ряд генерирован моделью АРПСС( $p, d, q$ ). По этим наблюдениям можно генерировать ряд  $\vec{\omega}$  из  $n=N-d$  разностей  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , где  $\omega_t = \nabla^d z_t$ . Тогда общая задача подгонки параметров  $\phi$  и  $\theta$  модели АРПСС эквивалентна задаче подгонки к  $\vec{\omega}$  стационарной смешанной модели АРСС ( $p, q$ ) в виде:

$$a_t = \tilde{\omega}_t - \phi_1 \tilde{\omega}_{t-1} - \dots - \phi_p \tilde{\omega}_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}, \quad (15)$$

где  $\omega_t = \nabla^d z_t$ ,  $\tilde{\omega}_t = \omega_t - \mu$ ,  $E[\omega_t] = \mu$ .

Для  $d > 0$  часто разумно предположить, что  $\mu = 0$ . Когда это не оправдано, предполагаем, что  $\mu$  можно оценить:  $\tilde{\omega} = \sum_{t=1}^n \frac{\omega_t}{n}$ .

Значения  $\vec{\omega}$  не могут быть сразу подставлены в (15) для вычисления  $a$  из-за трудностей с начальными условиями разностного уравнения. Предполагая, что  $p$  значений  $\vec{\omega}_*$  ряда  $\omega$  и  $q$  значений  $\vec{a}_*$  ряда  $a$  даны до начала наблюденного ряда  $\omega$ , то для любого данного набора параметров  $(\bar{\phi}, \bar{\theta})$  и начальных значений  $(\vec{\omega}_*, \vec{a}_*)$  можно последовательно вычислить множество значений  $a_1, a_2, \dots, a_n$  по (15).

Если дано множество величин  $\vec{\omega}$ , то *условная логарифмическая функция правдоподобия* для параметров  $(\bar{\phi}, \bar{\theta}, \sigma_a)$  при заданных  $(\vec{\omega}_*, \vec{a}_*)$

$$l_* (\bar{\phi}, \bar{\theta}, \sigma_a) = -n \ln \frac{S_* (\bar{\phi}, \bar{\theta})}{2\sigma_a^2} \quad (16)$$

где  $l_*(\bar{\phi}, \bar{\theta}, \sigma_a)$  - условная логарифмическая функция правдоподобия,

$$S_* (\bar{\phi}, \bar{\theta}) = \sum_{t=1}^n a_t^2 (\bar{\phi}, \bar{\theta} | \vec{\omega}_*, \vec{a}_*, \vec{\omega}) \quad (17)$$

Заметим, что в условное правдоподобие данные входят через *условную сумму квадратов*  $S_*(\bar{\phi}, \bar{\theta})$ . Очевидно, что изолинии  $l_*$  для любого заданного значения  $\sigma_a$  в пространстве  $(\bar{\phi}, \bar{\theta}, \sigma_a)$  совпадают с изолиниями  $S_*$ , т.е. *оценки максимального правдоподобия те же, что и оценки наименьших квадратов*. В предположении о нормальности можно изучать поведение условного правдоподобия, исследуя условную сумму квадратов.

*Выбор начальных условий для вычисления условного правдоподобия.* В ряде случаев, когда  $p$  велико достаточно хорошоим приближением к безусловной функции правдоподобия является условная функция правдоподобия, в которой вместо  $(\vec{\omega}_*, \vec{a}_*)$  в (16) подставлены подходящие численные значения. При подгонке модели АРПСС ( $p, d, q$ ) будем пользоваться процедурой аппроксимации, которая сводится к вычислению  $a$ , начиная с  $a_{p+1}$ , и приравниванию предварительно предыдущих  $a$  нулю. Этим способом можно вычислить сумму квадратов только для  $n-p=N-p-d$  значений ряда  $a_t$ , но для длинного ряда небольшая потеря информации несущественна.

*Безусловное правдоподобие, сумма квадратов, оценки наименьших квадратов.* В литературе показано, что для  $N=n+d$  наблюдений, генерируемых моделью АРПСС, *безусловная логарифмическая функция правдоподобия* имеет вид

$$l_*(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \sigma_a) = f(\vec{\phi}, \vec{\theta}) - n \ln \sigma_a - \frac{S(\vec{\phi}, \vec{\theta})}{2\sigma_a^2} \quad (18)$$

где  $f(\vec{\phi}, \vec{\theta})$  - функция фи и  $\theta$

Безусловная функция квадратов выражается в виде:

$$S(\vec{\phi}, \vec{\theta}) = \sum_{t=-\infty}^n \left[ a_t |(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\omega}) \right]^2 \quad (19)$$

где  $\left[ a_t |(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\omega}) \right] = E[a_t |(\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\omega})]$  - условное математическое ожидание  $a_t$  при фиксированных  $\vec{\phi}, \vec{\theta}, \vec{\omega}$ .

Обычно  $f(\vec{\phi}, \vec{\theta})$  значимо только при малых  $n$ , а для средних и больших  $n$  в (18) доминирует  $S(\vec{\phi}, \vec{\theta})$  и поэтому изолинии безусловной суммы квадратов в пространстве параметров  $(\vec{\phi}, \vec{\theta})$  практически совпадают с изолиниями функции правдоподобия и логарифмической функции правдоподобия. Таким образом, оценки, полученные минимизацией суммы квадратов (оценки наименьших квадратов), как правило, очень близки к оценкам максимального правдоподобия.

При вычислении безусловной суммы квадратов [a] находится по рекуррентной формуле  $a_t = \tilde{\omega}_t - \phi_1 \tilde{\omega}_{t-1} - \dots - \phi_p \tilde{\omega}_{t-p} + \theta_1 a_{t-1} + \dots + \theta_q a_{t-q}$  взятием условных математических ожиданий от обеих частей. Предварительный расчет в обратном направлении  $[\omega_{-j}], j = 0, 1, 2, \dots$ , т.е. прогнозы назад, необходимы для начала рекуррентных вычислений в прямом направлении.

*Вычисление безусловной суммы квадратов для процесса скользящего среднего.* Использование возвратного процесса для определения начальных условий. Пусть дан временной ряд  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ , представляющий процесс

$$\phi(B)\omega_t = \theta(B)a_t \quad (20)$$

Пусть необходимо оценить значения  $\omega_0, \omega_{-1}, \omega_{-2}, \dots$  ряда в моменты времени предшествующие первому наблюдению по данным  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ . Вероятностная структура  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  может быть объяснена как прямой моделью (20), так и возвратной моделью

$$\phi(F)\omega_t = \theta(F)e_t \quad (21)$$

где  $Fz_t = z_{t+1}$

Пример. Пусть исследуемый ряд был пробно идентифицирован как процесс ПСС(0,1,1), который может быть записан в прямой или возвратной форме:

$$\omega_t = (1-\theta B)a_t \text{ или } \omega_t = (1-\theta F)e_t$$

где  $\mu = E[\omega_t] = 0$ .

Тогда можно записать:

$$[e_t] = [\omega_t] + \theta[e_{t+1}] \quad (22)$$

$$[a_t] = [\omega_t] + \theta[a_{t-1}] \quad (23)$$

где  $[\omega_t] = \omega_t$  для  $t=1, 2, \dots, n$  и является прогнозом  $\omega_t$  назад для  $t \leq 0$ .

Удобная схема вычислений представлена в табл. 3.

Таблица 3 – Вычисление  $[a_t]$  при  $\theta = 0,5$

t	$z_t$	$[a_t]$	$0.5[a_{t-1}]$	$[\omega_t]$	$0.5[e_{t+1}]$	$[e_t]$
---	-------	---------	----------------	--------------	----------------	---------

-1	[458.4]	0	0	0	0	0
0	460	1.6	0	1.6	-1.6	0
1	457	-2.2	0.8	-3.0	-0.1	-3.1
2	452	-6.1	-1.1	-5.0	4.8	-0.2
3	459	4.0	-3.0	7.0	2.6	9.6
4	462	5.0	2.0	3.0	2.3	5.3
5	459	-0.5	2.5	-3.0	7.6	4.6
6	463	3.8	-0.2	4.0	11.1	15.1
7	479	17.9	1.9	16.0	6.2	22.2
8	493	23.0	9.0	14.0	-1.5	12.5
9	490	8.5	11.5	-3.0	0	-3.0

Начинаем заполнение таблицы 3 с внесения известных величин:

- a)  $z_0, z_1, \dots, z_9$  по которым можем вычислить  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_9$ .
- б) значения  $[e_0], [e_{-1}], \dots = 0$
- в) значения  $[a_{-1}], [a_{-2}], \dots = 0$ , т.к. для любого процесса  $CC(q)a_{-q}, a_{-q-1}, \dots = 0$  Но, в общем случае  $[a_0], [a_{-1}], \dots, [a_{-q+1}] \neq 0$  и могут быть получены прогнозированием назад.

Начиная с конца ряда, используя (2), вычисляем  $[e_t]$  при  $t = 9, 8, 7, \dots, 1$  ( $[e_{10}] = 0$ ). Эффект этой аппроксимации состоит во внесении в систему переходного процесса, но в силу стационарности операторов  $\phi(B)$  и  $\theta(B)$  этот процесс почти всегда пренебрежимо мал к моменту начала ряда и поэтому не повлияет на расчет  $a$ .

Далее используя (22) доходим до  $[e_0]$ :

$$[e_0] = [\omega_0] + \theta[e_1],$$

$$[\omega_0] = -\theta[e_1]$$

Далее используя (23) при  $t=0$ , получаем:

$$[a_0] = [\omega_0] + \theta[a_{-1}],$$

$$[a_{-1}] = 0$$

и т.д. Далее, используя (19), находим безусловную сумму квадратов.

*Общий способ вычисления безусловной суммы квадратов.* Для процесса  $CC(q)$  необходимы  $q$  ненулевых предварительных значений  $[\omega_0], [\omega_{-1}], \dots, [\omega_{1-q}]$ .

Пусть  $\omega_t$  генерируется стационарной прямой и возвратной моделями:

$$(1 - 0,3B)\omega_t = (1 - 0,7B)a_t$$

$$(1 - 0,3F)\omega_t = (1 - 0,7F)e_t$$

В предположении, что среднее значение  $\omega$  равно 0.

Тогда:

$$[e_t] = [\omega_t] - 0,3[\omega_{t+1}] + 0,7[e_{t+1}] \quad (24)$$

$$[a_t] = [\omega_t] - 0,3[\omega_{t-1}] + 0,7[a_{t-1}] \quad (25)$$

$$[\omega_t] = \omega_t \quad (t = 1, 2, \dots, n).$$

Схема вычисления безусловной суммы квадратов для процесса АРПСС представлена в таблице 4.

Таблица 4 - Вычисление  $[a_t]$  при  $\phi = 0,3$ ,  $\theta = 0,7$

t	$[a_t]$	$0.7[a_{t-1}]$	$-0.3[\omega_{t-1}]$	$[\omega_t]$	$-0.3[\omega_{t+1}]$	$0.7[e_{t+1}]$	$[e_t]$
-4	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.01	0	0
-3	-0.04	-0.01	0.00	-0.03	0.03	0	0
-2	-0.11	-0.03	0.01	-0.09	0.09	0	0
-1	-0.36	-0.08	0.03	-0.31	0.31	0	0
0	-1.20	-0.25	0.09	-1.04	-0.60	1.64	0
1	1.47	-0.84	0.31	2.00	-0.24	0.58	2.34
2	1.23	1.03	-0.60	0.80	0.09	-0.06	0.83
3	0.32	0.86	-0.24	-0.30	0.09	0.13	-0.08
4	0.02	0.23	0.09	-0.30	0.57	-0.09	0.18
5	-1.80	0.01	0.09	-1.90	-0.09	1.86	-0.13
6	-0.39	-1.26	0.57	0.30	-0.96	3.32	2.66
7	2.84	-0.27	-0.09	3.20	-0.48	2.02	4.74
8	2.63	1.99	-0.96	1.60	0.21	1.08	2.89
9	0.66	1.84	-0.48	-0.70	-0.90	3.14	1.54
10	3.67	0.46	0.21	3.00	-1.29	2.78	4.49
11	5.97	2.57	-0.90	4.30	-0.33	0	3.97
12	3.99	4.18	-1.29	1.10			

Заполнение таблицы 4 начинается с центрального столбца внесением известных значений  $[w_t]$ . Далее в последний столбец вносятся нулевые значения для  $[e_0], [e_{-1}], \dots = 0$ . Возвратное уравнение используется для расчета условных величин. Учитывая наличие оператора  $AP(I)$ , расчет начинаем с конца ряда и подставляем 0 в строку  $t=11$  вместо неизвестного значения  $0.7[e_{12}]$ . Рекуррентный расчет ведется вперед при помощи (24).

Прогнозы назад  $[w_{-j}]$  ( $j=0,1,2,\dots$ ) быстро затухают и при указанной точности вычислений до двух знаков равны нулю при  $j>4$ . На основании этого оценки  $[a_{-j}] = 0$  для  $j>4$ . Рекуррентный расчет ведется вперед при помощи (25). Далее суммированием квадратов всех вычисленных  $[a_t]$  находится безусловная сумма квадратов.

*Графическое исследование суммы квадратов.* Пусть для процесса ПСС(0,1,1) с параметром  $\theta = 0,5$  была рассчитана безусловная сумма квадратов для значений  $\theta$  от -0,5 до 0,5 (табл.5)

Таблица 5 - Нахождение  $S(\theta)$  для процесса ПСС(0,1,1)

$\theta$	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$S(\theta)$	23929	21594	20222	19483	19220	19363	19896	20849	22315	24478	27691

Графическое исследование  $S(\theta)$  представлено на рис. 6. Минимальная сумма квадратов получается при  $\theta = -0,09$ , это дает оценку наименьших квадратов, которая является хорошим приближением к оценке максимального правдоподобия параметра  $\theta$ .

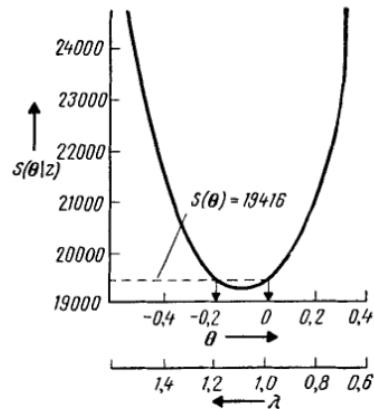


Рис. 6 – График  $S(\theta)$

На рис. 7 представлен пример графического анализа сумм квадратов для двух параметров (ПСС(0,2,2)) путем вычисления сумм квадратов по подходящей сетке значений параметров и вычерчивания изолиний. Минимальное значение суммы квадратов достигается при  $\lambda_0 = 1.09, \lambda_1 = 0.0$ , это говорит о том, что исследуемый ряд описывается процессов ПСС(0,1,1), а не ПСС(0,2,2).

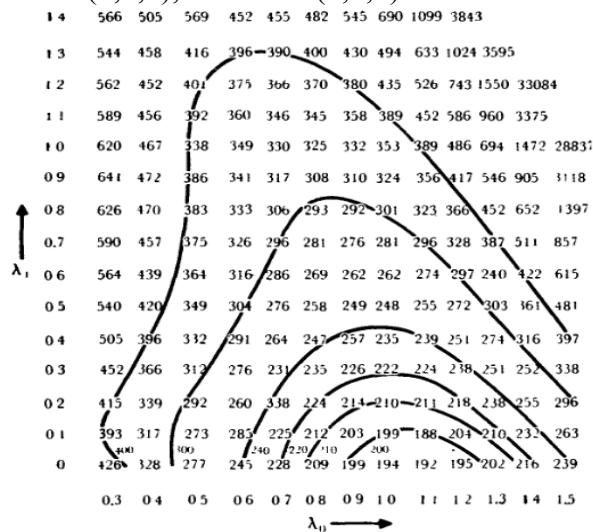


Рис. 7 – Значения  $S(\lambda_0, \lambda_1)$  в узлах сетки  $\lambda_0, \lambda_1$  и приближенные изолинии ( $\lambda = (1 - \theta)$ )

Для графического исследования суммы квадратов для трех параметров необходимо построить набор двумерных диаграмм для различных фиксированных значений третьего параметра.

#### *Вопросы для самоконтроля:*

1. Применение фундаментальных законов природы в области математического моделирования.
2. Вариационные принципы. Формализм Гамильтона.
3. Примеры типовых математических схем.
4. Виды стохастической моделей.
5. Этапы идентификации стохастической модели. АКФ и ЧАКФ.
6. Оценивание. Начальные и эффективные оценки параметров модели.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [6]; [13].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Методы построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы. Закон сохранения материи. Закон сохранения импульса.
2. Вариационные принципы построения математических моделей, основанные на формализме Лагранжа.
3. Универсальность математических моделей.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [6]; [13].

*Тема: «Методы исследования математических моделей»*

*Основные понятия темы:* аналитические методы, численные методы, имитационное моделирование, устойчивость модели, адекватность модели, диагностические проверки, совокупный критерий согласия, нормированная кумулятивная периодограмма.

### *Материалы лекций*

#### *Методы исследования математических моделей*

Под математическим моделированием понимают процесс установления соответствия данному реальному объекту некоторого математического объекта, называемого *математической моделью*, и *исследование этой модели*, позволяющее получать характеристики рассматриваемого реального объекта. Математическое моделирование можно разделить на аналитическое, имитационное и комбинированное (аналитико-имитационное).

*Аналитические модели* описывают процессы функционирования элементов системы (объекта) в виде некоторых математических соотношений (алгебраических, дифференциальных, конечно-разностных, логических и т.д.) или логических условий. Для исследования аналитических моделей используют следующие *методы*:

а) аналитические (аппарат теории массового обслуживания, теории вероятности, методы оптимизации и т.д.) – получение в общем виде явных зависимостей для искомых характеристик;

б) численные (методы численного анализа), когда невозможно решить полученное уравнение в общем виде, но можно получить численный результат при конкретных начальных данных.

*Аналитические методы* позволяют провести детальный (полный) анализ процесса функционирования системы в широком диапазоне изменения её параметров, но их применение ограничено сравнительно простыми системами и узким кругом задач. В случае, когда результат не может быть получен в явном виде, используют численные методы, при этом полученное решение носит частный характер и представляется в виде набора (таблиц) чисел, графиков зависимостей. Численный метод позволяет исследовать по сравнению с аналитическим методом более широкий класс систем, но при этом полученные решения носят частный характер. Численное моделирование подразумевает возможность использования ЭВМ для исследования реальной системы. Алгоритмы, реализующие численные методы на ЭВМ, должны обладать свойствами численной сходимости и устойчивости:

- алгоритм считается сходящимся, если при последовательном уменьшении шага получается всё более точный ответ;

- алгоритм считается устойчивым, если небольшая ошибка на любой стадии моделирования приводит к небольшой ошибке в решении.

*Имитационное моделирование* применяют в тех случаях, когда исследование систем методами аналитического моделирования (даже численными) затруднительно или невозможно. Имитационное моделирование предполагают применение специальных программных средств и языков программирования. При имитационном моделировании реализующий модель алгоритм воспроизводит процесс функционирования системы во времени, причем имитируются элементарные явления, составляющие процесс, с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени, что позволяет по исходным данным получить сведения о состояниях процесса в определенные моменты времени. Имитационные модели позволяют провести анализ систем любой степени сложности с любой степенью детализации. Однако, такой подход является трудоемким и носит частный характер получаемых результатов.

В случае *комбинированного моделирования* (аналитико-имитационное) проводится предварительная декомпозиция процесса функционирования системы на составляющие подпроцессы и для тех из них, где это возможно, используются аналитические модели, а для остальных подпроцессов строятся имитационные модели. С использованием такого подхода могут быть исследованы новые классы систем, для которых неэффективно применение только аналитического или имитационного моделирования в отдельности.

### *Устойчивость. Проверка адекватности математических моделей*

Все разрабатываемые математические модели должны отвечать ряду *требований*, в соответствии с которыми модель должна быть:

- простой (должна отображать только существенные свойства (особенности) объекта);
  - адекватной по отношению к моделируемой системе (объекту, процессу);
  - устойчивой;
  - надежной;
  - полной с точки зрения достижения поставленной цели;
  - адаптивной (допускать изменения и развития модели по мере получения новой информации об исследуемой системе).

Важным требованием, предъявляемым к моделям, является требование их устойчивости. Под *устойчивостью* понимают свойство модели, характеризующее ее способность обеспечить результаты расчетов, отклоняющиеся от идеальных данных на допустимо малую величину. При этом в качестве идеальных подразумеваются выходные данные, получаемые в таких условиях, когда модель реализует записанные в ней математические зависимости абсолютно без помех; соответственно, реальные выходные данные получаются в условиях определенных возмущающих воздействий.

Можно различить несколько аспектов понятия «устойчивость». *Устойчивость модели по отношению к изменениям ее параметров* означает сохранение аппарата моделирования, основных связей между переменными, типов ограничений в некотором интервале ее параметров. Другим аспектом устойчивости является *устойчивость решения задачи (результатов) моделирования* (обнаруженных свойств, сценариев, траекторий, состояний) по отношению к изменениям параметров модели или начальных условий. Если зависимость от параметров и начальных условий является *регулярной*, то малые ошибки в исходных данных приведут к небольшим изменениям результата. Тогда, решая, например, задачу выбора по приближенным данным, можно обоснованно

говорить о нахождении приближенного решения. Устойчивость результатов моделирования по отношению к изменениям реальности достигается сочетанием свойств устойчивости и адекватности модели.

Под *адекватностью*(от лат. – приравненный, равный) понимается степень соответствия процессов, протекающих в модели, процессам, имеющим место, в исследуемой системе (объекте, явлении), и, следовательно, степень соответствия свойств и характеристик модели свойствам и характеристикам системы. При этом адекватность модели зависит от:

- а) цели моделирования;
- б) степени полноты и достоверности сведений об исследуемой системе;
- в) степени детализации модели;
- г) корректности параметризации модели, под которой понимается установления соответствия между параметрами системы и модели;
- д) уровня подготовки и опыта исследователя.

Стоит отметить, что понятия простоты модели и ее адекватности тесно взаимосвязаны. Простота модели зависит от ее детализации: чем ниже уровень детализации, тем проще модель, но в то же, время она менее адекватна исследуемой системе. С другой стороны построение более сложной модели позволяет повысить степень её адекватности, однако, может привести к невозможности получения и интерпретации результатов моделирования.

*Проверка адекватности математических моделей.* После того как модель идентифицирована и параметры оценены, необходимо решить вопрос, адекватна ли эта модель. С целью проверки адекватности подгоняемую модель подвергают *диагностическим проверкам*. Диагностические проверки позволяют выявить возможные дефекты подгонки и диагностировать их причины. Если такие дефекты не выявлены, модель готова к использованию. Если обнаружено какое-либо несоответствие, то итеративные циклы идентификации, оценок и диагностической проверки повторяются до тех пор, пока не будет найдено подходящее представление модели. Рассмотрим методы диагностических проверок на примере класса моделей АРПСС.

Один из полезных методов проверки модели состоит в использовании *избыточного числа параметров*, т.е. в оценивании параметров для несколько более общей модели, чем ожидаемая. Это ставит под угрозу идентифицированную модель, т.к. более сложная модель содержит дополнительные параметры, с помощью которых можно ликвидировать возможные отклонения. Однако, этот метод исходит из того, что мы можем угадать неадекватные свойства модели. Поэтому необходимо дополнить этот подход более общими способами проверки, основанными на анализе остаточных ошибок после подгонки модели, например, автокорреляционная функция остаточных ошибок и кумулятивная периодограмма остаточных ошибок. Эти методы позволяют найти в данных указание, какие изменения модели необходимы. Рассмотрим более подробно диагностические проверки, применяемые к остаточным ошибкам.

*Проверка при помощи автокорреляционной функции остаточных ошибок.* Пусть временной ряд описывается моделью  $\phi(B)\tilde{\omega}_t = \theta(B)a_t$ , где  $\omega_t = \nabla^d z_t$ . И были получены оценки максимального правдоподобия параметров  $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ .

Тогда величины

$$\hat{a}_t = \hat{\theta}^{-1}(B)\hat{\phi}(B)\tilde{\omega}_t \quad (1)$$

называются *остаточными ошибками*.

Для адекватной модели  $\hat{a}_t = a_t + 0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$  по мере увеличения длины ряда  $\hat{a}_t$

становится все ближе к белому шуму  $a_t$ . Если модель верна, то выборочные автокорреляции  $r_k(a)$  ряда  $a$  должны быть некоррелированы и распределены приближенно нормально относительно нулевого среднего значения с дисперсией  $n^{-1}$  и, следовательно, со стандартной ошибкой  $n^{-1/2}$ . На практике мы не знаем истинных значений параметров, а располагаем только выборочными оценками  $(\hat{\phi}, \hat{\theta})$ , по которым, пользуясь (1), мы можем вычислить не  $a$ , а  $\hat{a}$ .

Автокорреляции  $r_k(\hat{a})$  ряда  $\hat{a}$  могут дать ценную информацию о недостаточно хорошей подгонке и возможной природе неадекватности модели.

Дисперсии и ковариации всех автокорреляций  $\hat{a}$  для больших выборок любого процесса АРСС были выведены Боксом и Пирсом. Они показали, что использование  $n^{-1/2}$  в качестве стандартной ошибки для  $r_k(\hat{a})$  будет приводить к недооценке статической значимости кажущегося отклонения от нуля для автокорреляции при малых задержках, но обычно вполне оправдано для средних и больших задержек.

Во многих случаях предпочтительнее не рассматривать отдельные  $r_k(\hat{a})$ , а оценить неадекватность модели по первым  $K$  автокорреляциям, рассматриваемым как единое целое. В работе Бокса и Дженкинса показано, что подгоняемая модель удовлетворительна, если

$$Q = n \sum_{k=1}^K r_k^2(\hat{a})$$

распределено приближенно как  $\chi^2(K - p - q)$ ,  $n = N - d$ .

Если модель не соответствует данным, среднее значение  $Q$  поднимается. Следовательно, общий или «совокупный», критерий проверки гипотезы об адекватности модели, можно провести, сопоставив наблюденное значение  $Q$  с таблицей  $\chi^2$ -распределения. Рассмотренный критерий называется *совокупным критерием согласия*.

*Проверка при помощи кумулятивной периодограммы.* В некоторых ситуациях, особенно при подгонке сезонных временных рядов, можно опасаться, что неадекватно учтен периодический характер ряда. Следовательно, необходимо исследовать периодичность остаточных ошибок. Автокорреляционная функция не является чувствительным индикатором таких отклонений от случайности. Для обнаружения периодичности на фоне белого шума специально разработаны периодограммы. *Периодограмма* временного ряда  $a_t$ ,  $t = 1, n$  имеет вид:

$$I(f_i) = \frac{2}{n} \left[ \left( \sum_{t=1}^n a_t \cos 2\pi f_i t \right)^2 + \left( \sum_{t=1}^n a_t \sin 2\pi f_i t \right)^2 \right],$$

где  $f_i = i/n$  – частота.

Таким образом, это результат корреляции  $a_t$  с синусоидами и косинусоидами различных частот. Периодичность с данной частотой  $f_i$ , имеющаяся в остаточных ошибках, подчеркивается при корреляции с синусоидой и косинусоидой той же частоты и дает поэтому большое значение  $I(f_i)$ .

Спектр мощности  $P(f)$  белого шума имеет постоянное значение  $2\sigma_a^2$  в частотном диапазоне 0–0.5 Гц. Тогда график кумулятивного спектра белого шума как функции  $f$

$$P(f) = \int_0^f p(q)dq$$

имеет вид прямой линии, идущей от точки  $(0;0)$  к точке  $(0.5;\sigma_a^2)$ , и, следовательно, график  $P(f)/\sigma_a^2$  – прямая линия, идущая от  $(0;0)$  к  $(0.5;1)$ . Для белого шума

$E[I(f)] = 2\sigma_a^2$  – несмешенная оценка, тогда  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^j I(f_i)$  – несмешенная оценка

$$\sum_{i=1}^j I(f_i)$$

проинтегрированного спектра, и  $C(f_j) = \frac{\sum_{i=1}^j I(f_i)}{ns^2}$  – оценка  $P(f_i)/\sigma_a^2$ , где  $s^2$  – оценка  $\sigma_a^2$ .

$C(f_j)$  называется нормированной кумулятивной периодограммой.

Если бы модель была адекватна, а параметры ее точно известны, то  $a$ , вычисляемые из данных, обладали бы свойствами белого шума. Для белого шума график  $C(f_j)$  имел бы разброс относительно прямой, соединяющей точки  $(0;0)$  и  $(0.5; 1)$ . С другой стороны, из-за неадекватности ряд  $a$  становится неслучайным, и его кумулятивная переодограмма должна систематически отклоняться от этой линии.

На практике мы не знаем точно значений параметров и располагаем только их выборочными оценками, также мы имеем только выборочные остаточные ошибки  $\hat{a}$  вместо  $a$ . Но для больших выборок периодограмма ряда  $\hat{a}$  имеет свойства, сходные со свойствами периодограммы белого шума  $a$ . Поэтому анализ периодограммы ряда  $\hat{a}$  может служить дополнительной диагностической проверкой для выявления неучтенных периодичностей.

Оценить отклонения периодограммы от желаемой для белого шума можно при помощи *критерия Колмогорова*. Пользуясь которым, около теоретической прямой можно провести предельные линии. Они проводятся на расстоянии  $\pm K_\varepsilon / \sqrt{q}$ ,  $q = (n - 2)/2, n = 2k$  или  $q = (n - 1)/2, n = 2k + 1$  выше и ниже теоретической прямой.  $K_\varepsilon$  приведены в табл. 1.

Таблица 1 – Оценка отклонений периодограммы от желаемой

$\varepsilon$	0.01	0.05	0.10	0.25
$K_\varepsilon$	1.63	1.36	1.22	1.02

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Методы исследования математических моделей.
2. Устойчивость модели. Адекватность модели.
3. Методы диагностических проверок стохастических моделей.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [6]; [10]; [12], [16].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Методы системного анализа для исследования математических моделей сложных объектов и систем.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [6]; [10]; [12], [16].

*Тема: «Математические модели в научных исследованиях»*

*Основные понятия темы:* экономико-математические модели, модели биологических систем, методы декомпозиции, многокомпонентные модели сложных данных, оценивание многокомпонентных моделей, диагностика многокомпонентных моделей

### ***Материалы лекций***

#### ***Математические модели в статистической механике, экономике, биологии, геофизике***

Современное развитие науки характеризуется потребностью изучения всевозможных сложных процессов и явлений – физических, химических, биологических, экономических, социальных и других. Математическое моделирование широко применяется в таких науках как биология, экономика, лингвистика, история и т.п.

В современной экономике широко используются различные математические модели, как для решения практических задач, так и для теоретического моделирования социально-экономических процессов. Математические модели позволяют описать существенные связи между экономическими процессами и явлениями, прогнозировать различные экономические показатели, разрабатывать стратегии управления экономическими объектами.

Модели в экономике классифицируются в зависимости от целей моделирования и особенностей моделируемого объекта. Модели макроэкономики позволяют описать экономику как единое целое с помощью таких показателей как ВВП, потребление, инфляция и др. Модели в микроэкономике описывают взаимодействие отдельных звеньев экономики или их поведение в отдельности в рыночной среде. Тактические модели позволяют изучать общие свойства экономики на основе выводов из формальных предпосылок. Оптимационные модели описывают процессы и явления рыночной экономики и позволяют оптимизировать деятельность потребителя, производителя или фирмы. Стохастические подразумевают наличие случайных связей между переменными моделями.

Разработка экономико-математических моделей основывается на общих подходах моделирования и включает такие этапы как: 1) формулировка цели; 2) выделение значимых факторов; 3) сбор и обработка информации; 4) выбор функции, составление уравнения; 5) оценка параметров модели; 6) проверка адекватности модели и оценка возможности ее использования для прогнозирования. Однако при моделировании экономических явлений следует учитывать их специфику, например, при выборе методов моделирования. Учитывая наличие большого статистического материала, представленного в форме различных временных рядов за достаточно продолжительный период, наиболее широкое применение в экономике получили линейные регрессионные модели. Параметры таких моделей можно оценить с помощью метода наименьших квадратов. При этом полученные оценки будут несмещенными, эффективными и состоятельными. Кроме линейных моделей, широко стали использоваться нелинейные модели, динамические модели с изменяющимися во времени коэффициентами регрессии, аддитивные регрессионные модели, регрессионные модели с дискретной зависимой переменной, дискретно-непрерывные модели. В этих моделях, как правило, более тонко отражается специфика моделируемых процессов, что естественным образом

открывает новые возможности для анализа специфических свойств моделируемых экономических процессов.

Чем более сложными являются объекты и процессы, которыми занимается наука, тем труднее найти математические абстракции, подходящие для описания этих объектов и процессов. Например, в *биологии* и другие естественные науки математика пришла только во второй половине XX века. В начале наиболее широкое применение в биологии получили методы математической статистики, которые применялись для обработки экспериментальных данных и получения выводов. Далее с развитием информационных технологий начали использовать сложные математические модели (в большинстве случаев имитационные), которые позволяли обрабатывать данные реальных экспериментов и предсказывать протекание биологических процессов в ходе виртуальных экспериментов.

Первые попытки математически описать биологические процессы относятся к моделям популяционной динамики. Эта область математической биологии и сегодня служит математическим полигоном, на котором "отрабатываются" модели в разных областях биологии: эволюции, микробиологии, иммунологии, и т.д. Самая первая известная «биологическая» модель – ряд Фибоначчи, который описывают количество пар кроликов, которые рождаются каждый месяц, если кролики каждый месяц дают потомство в виде пары кроликов: (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89,...).

Следующая известная модель – формула Мальтуса, описывающая размножение популяции со скоростью, пропорциональной ее численности. В дискретном виде закон Мальтуса представляет собой геометрическую прогрессию. Для дискретных моментов времени  $t_n$  зависимость между численностью популяции в моменты времени  $t_n$  и  $t_{n+1}$  выражается формулой:

$$N_{t+1} = qN_t \text{ или } N_{t+1} = q^n N_0.$$

Очевидно, что для таких сложных систем как популяция (совокупность организмов) представленные модели дают очень грубое упрощенное описание. С развитием ЭВМ появилась возможность имитировать достаточно сложные системы.

Условно математические модели биологических систем можно разделить на регрессионные, качественные и имитационные. Регрессионные зависимости описывают связь различных характеристик системы, не претендуя на особый физический или биологический смысл этих зависимостей. Для построения регрессионной модели достаточно статистически достоверных наблюдаемых корреляций между переменными или параметрами системы. Качественные (базовые) модели применяют для понимания законов взаимодействия элементов системы, основных закономерностей, лежащих в основе наблюдаемых в системе процессов. В дальнейшем эти модели используют как основу для построения более детальных моделей целого класса сходных систем. В биологии очень часто используют так же имитационное моделирование. К настоящему времени в литературе описано достаточно большое количество имитационных моделей биологических систем самого разного уровня: модели систем организмов (сердца, мозга и тд.), модели водных экосистем и др.

### *Математические модели в геофизике. Современные подходы к построению математических моделей*

На практике многие регистрируемые временные ряды имеют сложную нестационарную структуру и могут содержать изолированные особенности (аномальные изменения, например, разладка системы) различной формы и временной протяженности. Традиционные методы моделирования временных рядов (методы спектрального

анализа, процедуры сглаживания и модели временных рядов в виде линейной комбинации трендов, сезонных компонент, АРПСС) не содержат средства идентификации таких структур и являются не эффективными. С целью эффективного моделирования данных сложной структуры применяют *методы декомпозиции*, позволяющие упростить их структуру и представить в виде разномасштабных компонент. Например, методы декомпозиции на эмпирические моды (ДЭМ) и адаптивные вейвлет-разложения получают в настоящее время интенсивное развитие. Ввиду большого разнообразия базисных функций с компактными носителями *вейвлет-преобразование* дает возможность детально изучить структуру сложных данных и построить адаптивные аппроксимации. В настоящее время ведутся интенсивные исследования по применению этого метода в различных прикладных задачах, связанных с анализом сигналов, возникающих в геофизике, медицине, физике и др. областях науки. Расширяя область применения моделей АРПСС, группой авторов предложен метод идентификации моделей данных сложной структуры, основанный на совмещении вейвлетов и моделей АРПСС. В основе предлагаемого метода лежит конструкция кратномасштабного анализа, представляющая исходный временной ряд в виде разномасштабных компонент. Полученные компоненты имеют более простую структуру по сравнению с исходными данными, и для их аппроксимации используются методы АРПСС.

*Метод идентификации моделей на основе совмещения вейвлет-преобразования и моделей АРПСС.* Рассмотрим современные подходы в области математического моделирования на примере временного ряда ионосферных данных. Временной ряд параметров ионосферы имеет регулярную и аномальную составляющие и может быть представлен в виде многокомпонентной модели (МКМ):

$$f(t) = R(t) + U(t) + e(t) = \sum_{\mu=1,T} \alpha^{\mu}(t) + \sum_{\eta} \beta_{\text{возм}}^{\eta}(t) + e(t) \quad (1)$$

где  $R(t) = \sum_{\mu=1,T} \alpha^{\mu}(t)$  ( $\mu = \overline{1, T}$  – номер компоненты) – рекуррентная составляющая, описывает регулярные вариации параметров ионосферы (в периоды отсутствия возмущений в ионосфере);  $U(t) = \sum_{\eta} \beta_{\text{возм}}^{\eta}(t)$  – иррегулярная (аномальная) составляющая, возникающая в периоды возмущений;  $e(t)$  – случайная составляющая, включающая помехи искусственного происхождения (например, запуски ракет, промышленные взрывы и др.), а также аппаратные сбои.

На основе кратномасштабного вейвлет-разложения (КМА) временного ряда  $f_0$  до уровня  $m$ , получим (примем  $j = 0$ ):

$$f_0(t) = \sum_{j=-1}^{-m} g[2^j t] + f[2^{-m} t], \quad (2)$$

где  $f[2^{-m} t] \in V_{-m}$ ,  $f[2^{-m} t] = \sum_k c_{-m,k} \phi_{-m,k}(t)$  – сглаженная компонента масштаба  $m$ , коэффициенты  $c_{-m,k} = \langle f, \phi_{-m,k} \rangle$ ;  $g[2^j t] \in W_j$ ,  $W_j$  – пространство масштаба  $j$ , порожденное вейвлет-базисом  $\Psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \Psi(2^j t - k)$ ,  $g[2^j t] = \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$  – детализирующая компонента масштаба  $(-j)$ , коэффициенты  $d_{j,k} = \langle f, \Psi_{j,k} \rangle$ .

Таким образом, на основе КМА путем изменения уровня разложения  $m$  могут быть получены различные представления временного ряда параметров ионосферы, и

возникает задача определения такой схемы разложения временного ряда, которая позволит выделить регулярные  $\alpha^u(t)$  компоненты и разномасштабные аномальные изменения  $\sum_{\eta} \beta^{\eta}_{\text{возм}}(t)$ .

Предполагая, что если компонента обладает свойством строгой стационарности, то она описывает регулярные изменения параметров ионосферы, получаем следующий возможный алгоритм выделения регулярных компонент временного ряда.

1. Выполняем операцию быстрых вейвлет-разложений до 1-го уровня разложения и получаем сглаженную компоненту:  $f_{-m}(t) = \sum_k c_{-m,k} \phi_{-m,k}(t)$ ,  $m = 1$ .

2. Путем оценки числовых характеристик (анализ автокорреляционной (АКФ) и частной автокорреляционной функций (ЧАКФ)) проверяем для полученной компоненты  $f_{-m}(t)$  выполнение условия строгой стационарности.

3. В случае выполнения условия строгой стационарности для компоненты  $f_{-m}(t)$ , будем считаем, что она описывает регулярные изменения данных ( $m = m^{per}$ ) и выполняем переход на шаг 5, в противном случае выполняем переход на шаг 4.

4. В случае, если  $m \leq M$ , где  $M$  – максимальный допустимый уровень разложения:  $M \leq \log_2 N$  ( $N$  – длина вектора), увеличиваем на 1 уровень разложения  $m$  ( $m = m + 1$ ) и возвращаемся на шаг 2, в случае  $m > M$  завершаем выполнение алгоритма.

5. Путем оценки числовых характеристик (анализ АКФ и ЧАКФ) проверяем детализирующие компоненты  $g_j(t) = \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$ ,  $j = -1, -m^{per}$  на стационарность. В случае выполнения для компоненты  $g_j(t)$  условия строгой стационарности ( $j = j^{per}$ ), будем считать, что она описывает регулярные изменения данных.

Тогда рекуррентная составляющая  $R(t)$  модели (1) может быть представлена в виде:

$$R(t) = f_{-m^{per}}(t) + \sum_{j^{per}} g_{j^{per}}(t), \quad (3)$$

где  $f_{-m^{per}}(t) = \sum_k c_{-m^{per},k} \phi_{-m^{per},k}(t)$  – сглаженная компонента (тренд) временного ряда масштаба  $m^{per}$ , коэффициенты  $c_{-m^{per},k} = \langle f, \phi_{-m^{per},k} \rangle$ , масштабирующая функция  $\phi_{-m^{per},k}(t) = 2^{-m^{per}/2} \phi(2^{-m^{per}} t - k)$ ,  $f_{-m^{per}} \in V_{-m^{per}}$ ,

$V_{-m^{per}} = clos_{L^2(R)} \left( 2^{-\frac{m^{per}}{2}} \phi(2^{-m^{per}} t - k) \right)$ :  $k \in Z$ ,  $g_{j^{per}}(t) = \sum_k d_{j^{per},k} \Psi_{j^{per},k}(t)$  –

детализирующая компонента масштаба  $j = -j^{per}$ , коэффициенты которой  $d_{j^{per},k} = \langle f, \Psi_{j^{per},k} \rangle$  характеризуют амплитуду колебания (величину отклонения от тренда) в

момент времени  $t = k$ ,  $g_{j^{per}} \in W_{j^{per}}$ ,  $W_{j^{per}} = clos_{L^2(R)} \left( 2^{\frac{j^{per}}{2}} \Psi(2^{j^{per}} t - k) \right)$ :  $k \in$

$Z, \Psi_{j^{per},k}(t) = 2^{\frac{j^{per}}{2}} \Psi(2^{j^{per}} t - k)$  – базисный вейвлет.

В случае стационарности компонент  $f_{-m^{per}}(t)$  и  $g_{j^{per}}(t)$ , оценка их параметров может быть выполнена на основе АРПСС методов, и справедливо соотношение:

$$\omega_{-m^{per},k}(t) = \gamma_{-m^{per},1} \omega_{-m^{per},k-1} + \dots + \gamma_{-m^{per},p} \omega_{-m^{per},k-p} - \theta_{-m^{per},1} a_{-m^{per},k-1} - \dots - \theta_{-m^{per},h} a_{-m^{per},k-h}, \quad (4)$$

где  $\omega_{-m^{\text{per}},k} = \nabla^v c_{-m^{\text{per}},k}$ ,  $\nabla^v$  – оператор взятия разности порядка  $v$ ;  $p$ ,  $\gamma_{-m^{\text{per}},1} \dots \gamma_{-m^{\text{per}},p}$  – порядок и параметры авторегрессии сглаженной компоненты;  $h, \theta_{-m^{\text{per}},1} \dots \theta_{-m^{\text{per}},h}$  – порядок и параметры скользящего среднего сглаженной компоненты;  $a_{-m^{\text{per}},k}$  – остаточные ошибки модели сглаженной компоненты.

$$\omega_{j^{\text{per}},k}(t) = \gamma_{j^{\text{per}},1} \omega_{j^{\text{per}},k-1} + \dots + \gamma_{j^{\text{per}},p} \omega_{-m^{\text{per}},k-p} - \theta_{j^{\text{per}},1} a_{j^{\text{per}},k-1} - \dots - \theta_{j^{\text{per}},h} a_{j^{\text{per}},k-h}, \quad (5)$$

где  $\omega_{j^{\text{per}},k} = \nabla^{v_{j^{\text{per}}}} d_{j^{\text{per}},k}$ ,  $\nabla^{v_{j^{\text{per}}}}$  – оператор взятия разности порядка  $v_{j^{\text{per}}}$ ;  $p_{j^{\text{per}}}$ ,  $\gamma_{j^{\text{per}},1} \dots \gamma_{j^{\text{per}},p_{j^{\text{per}}}}$  – порядок и параметры авторегрессии детализирующей компоненты с разрешением  $j^{\text{per}}$ ;  $h_{j^{\text{per}}}, \theta_{j^{\text{per}},1} \dots \theta_{j^{\text{per}},h_{j^{\text{per}}}}$  – порядок и параметры скользящего среднего детализирующей компоненты с разрешением  $j^{\text{per}}$ ;  $a_{j^{\text{per}},k}$  – остаточные ошибки модели детализирующей компоненты с разрешением  $j^{\text{per}}$ .

Путем объединения моделей компонент (4) и (5) получаем представление  $R(t)$  в виде:

$$R(t) = \sum_{\mu=1,T} \sum_{k=1,N_{j^{\text{per}}}^{\mu}} s_{j^{\text{per}},k}^{\mu} b_{j^{\text{per}},k}^{\mu}(t), \quad (6)$$

где  $s_{j^{\text{per}},k}^{\mu}(t) = \sum_{l=1}^{p_{j^{\text{per}}}^{\mu}} \gamma_{j^{\text{per}},l}^{\mu} \omega_{j^{\text{per}},k-l}^{\mu} - \sum_{n=1}^{h_{j^{\text{per}}}^{\mu}} \theta_{j^{\text{per}},n}^{\mu} a_{j^{\text{per}},k-n}^{\mu}$  – оценочное значение регулярной  $\mu$ -ой компоненты,  $p_{j^{\text{per}}}^{\mu}$ ,  $\gamma_{j^{\text{per}},1}^{\mu}$  – порядок и параметры авторегрессии  $\mu$ -ой компоненты,  $h_{j^{\text{per}}}^{\mu}$ ,  $\theta_{j^{\text{per}},n}^{\mu}$  – порядок и параметры скользящего среднего  $\mu$ -ой компоненты,  $\omega_{j^{\text{per}},k}^{\mu} = \nabla^{v^{\mu}} \delta_{j^{\text{per}},k}^{\mu}$ ,  $v^{\mu}$  – порядок разности  $\mu$ -ой компоненты,  $\delta_{j^{\text{per}},k}^1 = c_{j^{\text{per}},k}, \delta_{j^{\text{per}},k}^{\mu} = d_{j^{\text{per}},k}, \mu = \overline{2, T}$ ,  $T$  – количество моделируемых компонент,  $a_{j^{\text{per}},k}$  – остаточные ошибки модели  $\mu$ -ой компоненты,  $N_{j^{\text{per}}}^{\mu}$  – длина  $\mu$ -ой компоненты,  $b_{j^{\text{per}},k}^1 = \phi_{j^{\text{per}},k}$  – масштабирующая функция,  $b_{j^{\text{per}},k}^{\mu} = \Psi_{j^{\text{per}},k, \mu = \overline{2, T}}$  – вейвлет-базис  $\mu$ -ой компоненты.

После идентификации пробного варианта модели и получения начальных оценок параметров (например, оценок Юла-Уокера) необходимо получить *эффективные оценки параметров*. Следуя методам АРПСС, процедура оценивания параметров может быть основана на исследовании функции правдоподобия. В терминах предлагаемой модели для регулярной составляющей (6), при заданных величинах  $\left( \left( \omega_{j^{\text{per}},k}^{\mu} \right)_*, \left( a_{j^{\text{per}},k}^{\mu} \right)_* \right)$ , функция правдоподобия для оцениваемых параметров  $\left( \gamma_{j^{\text{per}},p_{j^{\text{per}}}^{\mu}}^{\mu}, \theta_{j^{\text{per}},h_{j^{\text{per}}}^{\mu}}^{\mu}, \sigma_{a_{j^{\text{per}},k}^{\mu}} \right)$  имеет вид:

$$l_*^\mu \left( \gamma_{j^{\text{per}}}^\mu, p_{j^{\text{per}}}^\mu, \theta_{j^{\text{per}}, h_{j^{\text{per}}}^\mu}^\mu, \sigma_{a_{j^{\text{per}}, k}^\mu} \right) = -N_{j^{\text{per}}}^\mu \ln \sigma_{a_{j^{\text{per}}, k}^\mu} - \frac{S_*^\mu \left( \gamma_{j^{\text{per}}}^\mu, p_{j^{\text{per}}}^\mu, \theta_{j^{\text{per}}, h_{j^{\text{per}}}^\mu}^\mu \right)}{2 \left( \sigma_{a_{j^{\text{per}}, k}^\mu} \right)^2}$$

где  $l_*^\mu \left( \gamma_{j^{\text{per}}}^\mu, p_{j^{\text{per}}}^\mu, \theta_{j^{\text{per}}, h_{j^{\text{per}}}^\mu}^\mu, \sigma_{a_{j^{\text{per}}, k}^\mu} \right)$  – условная логарифмическая функция правдоподобия,

$S_*^\mu \left( \gamma_{j^{\text{per}}}^\mu, p_{j^{\text{per}}}^\mu, \theta_{j^{\text{per}}, h_{j^{\text{per}}}^\mu}^\mu \right)$  – условная сумма квадратов:

$$S_*^\mu \left( \gamma_{j^{\text{per}}}^\mu, p_{j^{\text{per}}}^\mu, \theta_{j^{\text{per}}, h_{j^{\text{per}}}^\mu}^\mu \right) = \sum_{k=1}^{N_{j^{\text{per}}}^\mu} \left( a_{j^{\text{per}}, k}^\mu \right)^2 (\gamma_{j^{\text{per}}}^\mu, p_{j^{\text{per}}}^\mu, \theta_{j^{\text{per}}, h_{j^{\text{per}}}^\mu}^\mu / \left( \omega_{j^{\text{per}}, k}^\mu \right)_*, \left( a_{j^{\text{per}}, k}^\mu \right)_*, \omega_{j^{\text{per}}, k}^\mu).$$

Согласно методам АРПСС оценки наименьших квадратов являются хорошим приближением к оценкам максимального правдоподобия, поэтому в предположении о нормальности можно изучать поведение условного правдоподобия, исследуя условную сумму квадратов.

Завершающим этапом идентификации модели является проверка соответствия (адекватности) подгоняемой модели к исследуемому природному процессу на основе *диагностических проверок*. Диагностика модели (6) основана на проверки адекватности образующих ее компонент – сглаженной  $f_{-m^{\text{pe}}}(t) = \sum_{k=1, N_{-m^{\text{pe}}}^\mu} s_{-m^{\text{pe}}, k}^1 b_{-m^{\text{pe}}, k}^1(t)$  и

детализирующих  $\sum_{j^{\text{pe}}} g_{-j^{\text{pe}}}(t) = \sum_{\mu=2}^T \sum_{k=1, N_{j^{\text{pe}}}^\mu} s_{j^{\text{pe}}, k}^\mu b_{j^{\text{pe}}, k}^\mu(t)$ . Следуя методам АРПСС,

диагностические проверки моделей компонент  $f_{-m^{\text{pe}}}(t)$  и  $\sum_{j^{\text{pe}}} g_{-j^{\text{pe}}}(t)$  построим на основе анализа их остаточных ошибок  $a_{j^{\text{pe}}}^\mu$ , определяемых в момент времени  $k$  с упреждением  $q$  как разность между фактическим и модельным значением:

$$a_{j^{\text{per}}, k+q}^\mu = s_{j^{\text{per}}, k+q}^{\mu, \text{факт}} - s_{j^{\text{per}}, k+q}^{\mu, \text{модель}},$$

$$\text{где } q \geq 1, s_{j^{\text{per}}, k+q}^{\mu, \text{модель}} = \sum_{l=1}^{p_{j^{\text{per}}}^\mu} \gamma_{j^{\text{per}}, l}^\mu \omega_{j^{\text{per}}, k+q-l}^\mu - \sum_{n=1}^{h_{j^{\text{per}}}^\mu} \theta_{j^{\text{per}}, n}^\mu a_{j^{\text{per}}, k+q-n}^\mu.$$

На основе *совокупного критерия согласия* подгоняемая модель  $\mu$ -ой компоненты удовлетворительна, если

$$Q^\mu = n^\mu \sum_{z=1}^{Z^\mu} r_{z^\mu}^2 \left( a_{j^{\text{pe}}}^\mu \right)$$

распределено приближенно как  $\chi^2(Z^\mu - h_{j^{\text{pe}}}^\mu - p_{j^{\text{pe}}}^\mu)$ , где  $Z^\mu$  – рассматриваемые первые автокорреляции остаточных ошибок модели  $\mu$ -ой компоненты;  $r_{z^\mu} \left( a_{j^{\text{pe}}}^\mu \right)$  – автокорреляции ряда остаточных ошибок модели  $\mu$ -ой компоненты;  $n^\mu = N_{j^{\text{pe}}}^\mu - \nu^\mu$ ,  $N_{j^{\text{pe}}}^\mu$  – длина ряда  $\mu$ -ой компоненты,  $\nu^\mu$  – порядок разности модели  $\mu$ -ой компоненты.

Нормированная кумулятивная периодограмма в терминах предлагаемой модели (6):

$$C^\mu(f_\beta) = \frac{\sum_{i=1}^{\beta} I(f_i)}{ns^2}$$

где  $I(f_i)$  – периодограмма ряда остаточных ошибок модели  $\mu$ -ой компоненты

$$a_{j^{pe},k}^\mu, k = \overline{1,n}, \quad n - \text{длина ряда} \quad a_{j^{pe},k}^\mu :$$

$$I(f_i) = \frac{2}{n} \left[ \left( \sum_{k=1}^n a_{j^{pe},k}^\mu \cos 2\pi f_i k \right)^2 + \left( \sum_{k=1}^n a_{j^{pe},k}^\mu \sin 2\pi f_i k \right)^2 \right], f_i = i/n - \text{частота}; \quad s^2 - \text{оценка } \sigma_{a_{j^{pe},k}^\mu}^2$$

ряда остаточных ошибок модели  $\mu$ -ой компоненты.

Предполагая, что в периоды длительных аномальных изменений произойдет изменение структуры временного ряда и, как следствие, возрастут остаточные ошибки  $a_{j^{per},k}^\mu$  рекуррентной составляющей  $R(t)$  модели (соотн. (6)), идентификация интенсивных аномальных изменений может быть основана на проверке условия:

$$\varepsilon_{j^{per}}^\mu = \sum_{q=1}^{Q_\mu} |a_{j^{per},k+q}^\mu| > H_{\mu,j^{per}}, \quad (7)$$

где  $a_{j^{per},k+q}^\mu = s_{j^{per},k+q}^{\mu,\text{факт}} - s_{j^{per},k+q}^{\mu,\text{модель}}$ , где  $q \geq 1$  – шаг упреждения данных,  $s_{j^{per},k+q}^{\mu,\text{модель}} = \sum_{l=1}^{p_{j^{per}}^\mu} \gamma_{j^{per},l}^\mu \omega_{j^{per},k+q-l}^\mu - \sum_{n=1}^{h_{j^{per}}^\mu} \theta_{j^{per},n}^\mu a_{j^{per},k+q-n}^\mu$ ,  $Q_\mu$  – длина упреждения данных на основе модели  $\mu$ -ой компоненты,  $H_{\mu,j^{per}}$  – пороговое значение  $\mu$ -ой компоненты, определяющее наличие аномальных изменений в  $\mu$ -ой компоненте.

Пороговое значение  $H_{\mu,j^{per}}$  в (7), может быть оценено как

$$H_{\mu,j^{per}}(Q_\mu) = u_{\xi/2} \left\{ 1 + \sum_{q=1}^{Q_\mu-1} \left( \Psi_{j^{per},q}^\mu \right)^2 \right\}^{1/2} \sigma_{a_{j^{per},k+q}^\mu},$$

где  $u_{\xi/2}$  – квантиль уровня  $(1 - \xi/2)$  стандартного нормального распределения,  $\sigma_{a_{j^{per},k+q}^\mu}$  – дисперсия остаточных ошибок модели  $\mu$ -й компоненты,  $\Psi_{j^{per},q}^\mu$  – весовые коэффициенты модели  $\mu$ -ой компоненты, которые определяются из соотношения

$$(1 - \varphi_{j^{pe},1}^\mu B - \varphi_{j^{pe},2}^\mu B^2 - \dots - \varphi_{j^{pe},p_j^\mu + v^\mu}^\mu B^{p_{j^{pe}}^\mu + v^\mu})(1 + \psi_{j^{pe},1}^\mu B + \psi_{j^{pe},2}^\mu B^2 + \dots) = \\ = (1 - \theta_{j^{pe},1}^\mu B - \theta_{j^{pe},2}^\mu B^2 - \dots - \theta_{j^{pe},h_{j^{pe}}^\mu}^\mu B^{h_{j^{pe}}^\mu}),$$

где  $\varphi_{j^{pe},p_j^\mu + v^\mu}^\mu$  – обобщенный оператор авторегрессии:  $\varphi_{j^{pe}}^\mu = \gamma_{j^{pe}}^\mu (B)(1 - B)^{v^\mu}$ ,  $B$  – оператор сдвига назад:  $B' \omega_{j^{pe},k}^\mu(t) = \omega_{j^{pe},k-1}^\mu(t)$ ,  $\psi_{j^{pe},0}^\mu = 0$ .

*Апробация МКМ на данных критической частоты ионосферы над Камчаткой.* При построении моделей использовались часовые данные критической частоты ионосферы  $f_0F2$ , представленные в виде временных рядов. Ионосферные данные  $f_0F2$  содержат регулярные вариации и аномальные изменения, возникающие в периоды ионосферных возмущений. С целью моделирования регулярного хода  $f_0F2$ , в оценках использовались временные интервалы, регистрируемые с периодами спокойной ионосферы (отсутствие солнечных вспышечных событий, магнитных бурь,

сейсмических событий). Учитывая сезонный характер ионосферного процесса, данные за разные сезоны моделировались отдельно.

Идентификация моделей выполнялась описанным выше способом. Кратномасштабные вейвлет-разложения данных  $f_0F2$  (см. соотн. (2)) выполнялись на основе вейвлета Добеши порядка 3. Используя выше представленный алгоритм, было определено *наилучшее представление* временного ряда, соответствующее кратномасштабному вейвлет-разложению до уровня  $m^* = 3$ :

$$f_0(t) = f[2^{-3}t] + g[2^{-3}t] + \sum_{j=-1}^{-2} g[2^j t] \quad (8)$$

где  $f[2^{-3}t] = \sum_k c_{-3,k} \phi_{-3,k}(t)$  – сглаженная стационарная компонента,

$g[2^{-3}t] = \sum_k d_{-3,k} \Psi_{-3,k}(t)$  – детализирующая стационарная компонента,  $g[2^j t] = \sum_k d_{j,k} \Psi_{j,k}(t)$

$j = -1, -2$  – детализирующие компоненты, содержат локальные особенности и шум.

Из полученного соотношения (8) следует, что исходные ряды  $f_0F2$  и сглаженные компоненты  $f[2^{-m}t]$ ,  $m = 1, 2$  имеют сложную структуру и не могут быть аппроксимированы моделью АРПСС. На рис. 1 показаны автокорреляционные функции (АКФ) исходного ряда, его первой разности и выделенных стационарных компонент. Результаты рис. 1 подтверждают, что непосредственное применение методов АРПСС не позволяет получить адекватную модель ряда. Выделенные компоненты ряда  $f[2^{-3}t]$  и  $g[2^{-3}t]$  имеют затухающие автокорреляционные функции и частные автокорреляционные функции порядка 3 (рис. 1), что позволяет идентифицировать для них модели авторегрессии порядка 3 (BoxandJenkins, 1970) и подтверждает эффективность предлагаемого подхода.

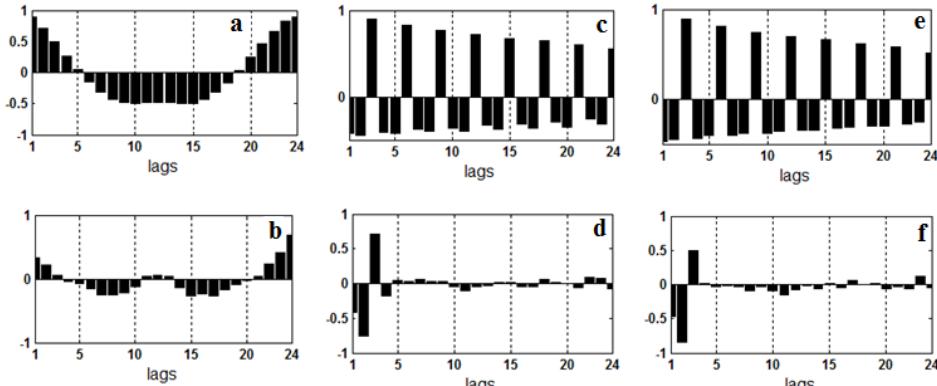


Рис. 1 а) – АКФ ряда  $f_0F2$ ; б) – АКФ первой разности ряда  $f_0F2$ ; в) – АКФ компоненты  $f[2^{-3}t]$ ; г) – частная АКФ компоненты  $f[2^{-3}t]$ ; д) – АКФ компоненты  $g[2^{-3}t]$ ; е) – частная АКФ компоненты  $g[2^{-3}t]$ . Анализируемый период 19.12.2011-08.01.2012 г., на оси ОХ отмечены лаги, по которым рассчитывались коэффициенты автокорреляции.

Оценка параметров моделей выделенных стационарных компонент  $f[2^{-3}t]$  и  $g[2^{-3}t]$  выполнялась традиционным методом Бокса, Дженинса. Результаты идентификации показали зависимость параметров моделей от сезона и уровня солнечной активности.

Для зимнего сезона в соответствии с соотн. (6) получены следующие модели.

Общая модель для высокой и низкой солнечной активности, полученная на основе взятия первой разности:

$$s_{3,k}^1 = -0.62 \cdot \omega_{3,k-1}^1 - 0.63 \cdot \omega_{3,k-2}^1 + 0.36 \cdot \omega_{3,k-3}^1 + a_{3,k}^1(t), \quad \omega_{3,k}^1 = \nabla c_{3,k} \quad -$$

оценочное значение компоненты  $f[2^{-3}t]$ ;  $s_{3,k}^2 = -0.97 \cdot \omega_{3,k-1}^2 - 0.93 \cdot \omega_{3,k-2}^2 + a_{3,k}^2(t)$ ,  
 $\omega_{3,k}^2 = \nabla d_{3,k}$  – оценочное значение компоненты  $g[2^{-3}t]$ .

Для летнего сезона в соответствии с соотн. (6) получены следующие модели:

1. Для высокой солнечной активности:

$s_{3,k}^1 = -0.50 \cdot \omega_{3,k-1}^1 - 0.58 \cdot \omega_{3,k-2}^1 + a_{3,k}^1(t)$ ,  $\omega_{3,k}^1 = \nabla c_{3,k}$  – оценочное значение компоненты  $f[2^{-3}t]$ ;  $s_{3,k}^2 = -0.88 \cdot \omega_{3,k-1}^2 - 0.80 \cdot \omega_{3,k-2}^2 + a_{3,k}^2(t)$ ,  $\omega_{3,k}^2 = \nabla d_{3,k}$  – оценочное значение компоненты  $g[2^{-3}t]$ .

2. Для низкой солнечной активности:

$s_{3,k}^1 = -0.83 \cdot \omega_{3,k-1}^1 - 0.73 \cdot \omega_{3,k-2}^1 + a_{3,k}^1(t)$ ,  $\omega_{3,k}^1 = \nabla c_{3,k}$  – оценочное значение компоненты  $f[2^{-3}t]$ ;  $s_{3,k}^2 = -0.95 \cdot \omega_{3,k-1}^2 - 0.86 \cdot \omega_{3,k-2}^2 + a_{3,k}^2(t)$ ,  $\omega_{3,k}^2 = \nabla d_{3,k}$  – оценочное значение компоненты  $g[2^{-3}t]$ .

*Диагностические проверки моделей.* Проверки, выполненные на основе совокупного критерия согласия, показали, что полученные МКМ-модели адекватно описывают временной ход данных  $f_0F2$ . Например, для временного интервала 09.08.2010-22.08.2010 величина  $Q^1 = n \sum_{k=1}^{20} r_k^2(a_1) = 16,15$  (для модели компоненты  $f[2^{-3}t]$ ) и

величина  $Q^2 = n \sum_{k=1}^{20} r_k^2(a_2) = 8,47$  (для модели компоненты  $g[2^{-3}t]$ ), что согласуется со значением  $\chi_{0,05}^2(20-2) = 28,9$  и, в соответствии с совокупным критерием согласия, подтверждает адекватность построенных моделей.

На рис. 2, в качестве примера, показаны результаты диагностики, выполненные на основе нормированной кумулятивной периодограммы для интервала 19.12.2011 – 08.01.2012 г., которые подтверждают адекватность полученных моделей компонент.

На рис. 3 показан процесс моделирования данных  $f_0F2$  в период относительно спокойного геомагнитного поля. Анализ рис. 3 показывает хорошие аппроксимирующие свойства модели и ее сходимость к процессу.

На рис. 4 представлены результаты моделирования временного ряда критической частоты ионосферы  $f_0F2$ . Анализ рис. 4 показывает, что в периоды спокойной ионосферы (отсутствуют землетрясения, К-индекс < 3) ошибки полученной модели не превышают доверительные интервалы (рис. 1, в, д, доверительные интервалы показаны пунктирной линией), что подтверждает ее адекватность. В возмущенные периоды, обусловленные повышением геомагнитной и сейсмической активностями, ошибки модели возрастают и выходят за пределы доверительных интервалов (СО), что свидетельствует об аномальных изменениях в данных  $f_0F2$ .

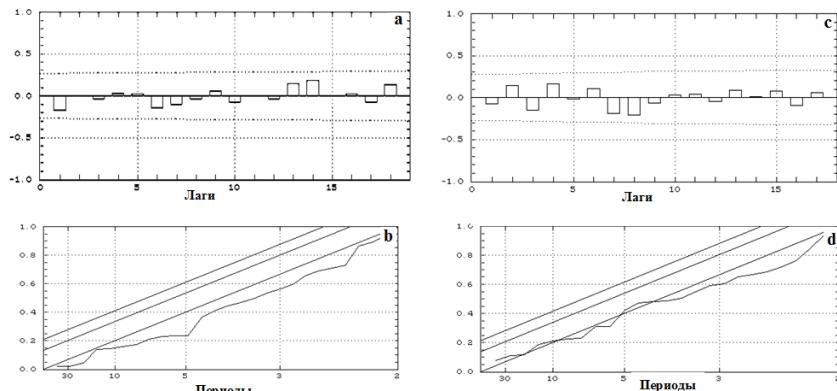


Рис. 2 – Результаты диагностики моделей компонент: а) – АКФ остаточных ошибок модели компоненты  $f[2^{-3}t]$ ; б)- кумулятивная периодограмма остаточных ошибок модели компоненты  $f[2^{-3}t]$ ; в) - АКФ остаточных ошибок модели компоненты  $g[2^{-3}t]$ ; г)- кумулятивная периодограмма остаточных ошибок модели компоненты  $g[2^{-3}t]$

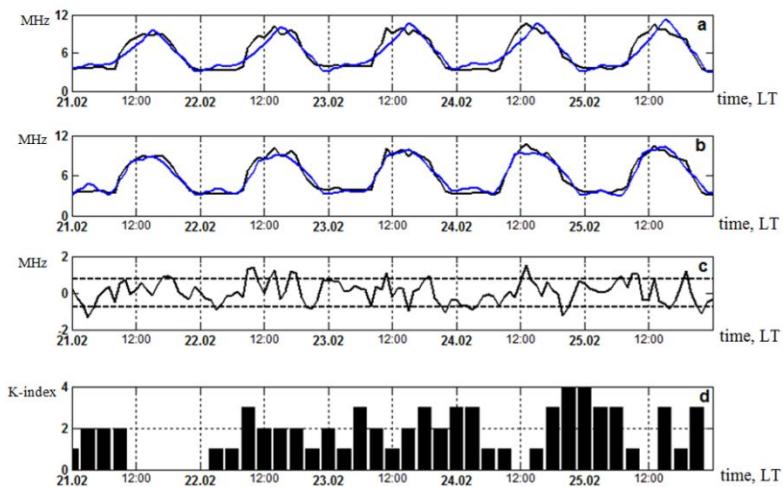


Рис. 3 – Моделирование данных  $f_O F2$ : а) –  $f_O F2$  (черная линия), моделирование данных  $f_O F2$  на основе модели компоненты  $f[2^{-3}t]$  (синяя линия); б) –  $f_O F2$  (черная линия), моделирование данных  $f_O F2$  на основе полученной МКМ-модели (синяя линия); в) – ошибки моделирования МКМ-модели; г) – К-индекс геомагнитной активности (ст. «Паратунка»). На графике в) пунктиром показаны стандартные отклонения ошибок МКМ-модели.

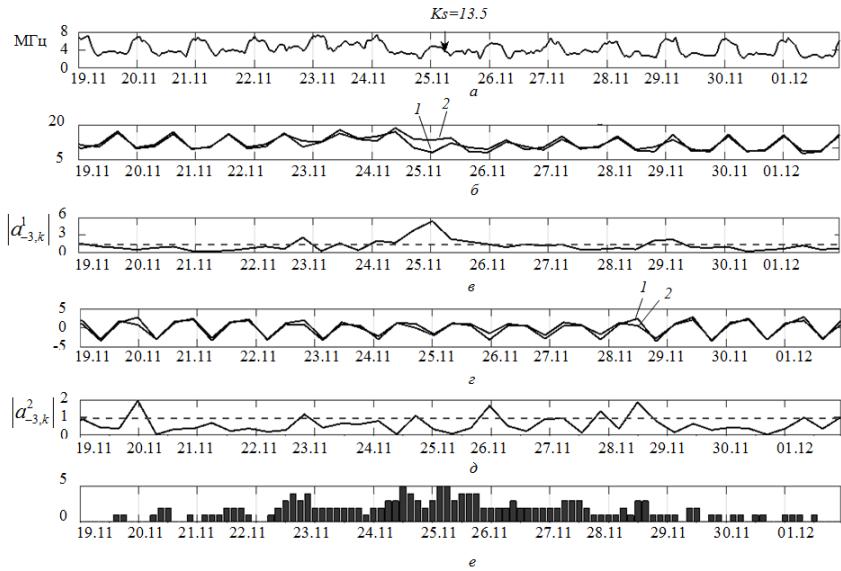


Рис. 4 – Моделирование данных  $foF2$ : а – регистрируемый временной ряд  $foF2$ , б – моделирование сглаженной компоненты  $f[2^{-3}t]$  (1 – фактические значения  $f[2^{-3}t]$ , 2 – модельные значения  $f[2^{-3}t]$ ), в – ошибки модели компоненты  $f[2^{-3}t]$ , г – моделирование детализирующей компоненты  $g[2^{-3}t]$  (1 – фактические значения  $g[2^{-3}t]$ , 2 – модельные значения  $g[2^{-3}t]$ ), д – ошибки модели компоненты  $g[2^{-3}t]$ , е – К-индекс геомагнитной активности. Стрелкой отмечен момент возникновения сейсмического события, произошедшего 25 ноября 2016 г в 07:26 UT с энергетическим классом  $Ks=13,5$  (рис. 1, а).

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Экономико-математические модели.
2. Модели биологических систем.
3. Современные подходы в построении моделей для временных рядов сложной структуры.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [7]; [8]; [10].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Математические модели в статистической механике.
2. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем.
3. Модели динамических систем. Особые точки. Бифуркации. Динамический хаос. Эргодичность и перемешивание. Понятие о самоорганизации. Диссипативные структуры. Режимы с обострением.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [7]; [8]; [10].

### **Раздел 3. Компьютерные технологии в моделировании**

*Тема: «Алгоритмические языки и программные средства»*

*Основные понятия темы:* языки программирования и их классификация, пакеты прикладных программ, MatLab, Statistica, имитационное моделирование, имитационная модель, метод Монте-Карло, AnyLogic.

#### *Материалы лекций*

*Представление о языках программирования высокого уровня. Современные пакеты прикладных программ*

Под *языком программирования* понимают правила представления данных и записи алгоритмов их обработки, которые автоматически выполняются ЭВМ. В более абстрактном виде язык программирования является средством создания программных моделей объектов и явлений внешнего мира. К настоящему времени созданы тысячи различных языков программирования – от самых примитивных до близких к естественному языку человека. Языки программирования служат разным целям и их выбор определяется удобностью пользователя, пригодностью для данного компьютера и данной задачи.

На заре компьютеризации (в начале 1950-х г.г.), машинный язык был единственным языком программирования. Программы, написанные на *машинно-зависимом языке*, были достаточно простыми и представляли собой последовательность команд и данных, заданных в цифровом виде, и могли выполняться только на ЭВМ данного типа. С увеличением программ был изобретен язык Ассемблер, который позволил программисту работать с большими, все более сложными программами, используя при этом символьные представления машинных инструкций. Однако, ассемблерные языки все еще оставались машинно- зависимыми, трудоемкими при отладке и требовали больших усилий для переноса на другие типы ЭВМ.

В середине 50-х годов по мере всевозрастающей сложности программ появились языки программирования *высоко уровня*, которые предоставляли дополнительные средства преодоления сложности программ. Эти языки программирования имитируют естественный язык, обладают укрупненными командами и ориентированы на отдельные прикладные области обработки информации. Языки программирования высокого уровня являются *машинно-независимыми*, что определяет их мобильность (возможность переноса на ЭВМ другого типа), но их исполнение требует использования соответствующих программ-переводчиков для преобразования текста программы в машинный код, который в итоге и обрабатывается процессором. Первым языком программирования, который получил широкое распространение был FORTRAN. Вскоре после языка Fortran появились такие ныне широко известные языки, как Algol, Cobol, Basic, Pascal, Си др. В настоящее время насчитывается свыше 2000 различных языков высокого уровня. Эти языки являются универсальными (с их помощью можно создавать любые прикладные программы) и алгоритмически полными, имеют широкий спектр типов данных и операций, поддерживают технологии программирования. Языки высокого уровня, как и любые другие языки, имеют строго определенную грамматику,

которая определяется не особенностями ЭВМ, а тем, какие классы задач предполагается решать на данном языке.

Таким образом, языки программирования высокого уровня имеют следующие достоинства:

- использование аппаратуры переменных и действия с ними;
- поддержка широкого набора типов данных;
- возможность записи сложных выражений;
- расширяемость типов данных за счет конструирования новых типов из базовых;
- расширяемость набора операций за счет подключения библиотек подпрограмм;
- слабая зависимость от типа ЭВМ.

*Классификация языков программирования.* Все языки программирования высокого уровня делятся на две группы: декларативные и императивные. Программа на *императивном* языке состоит из последовательности команд, определяющих процедуру решения задачи. Программа на *декларативном* языке программирования является сочетанием формализованной в рамках языка программирования задачей и всех необходимых для её решения теорем. Конкретную последовательность выполняемых действий выполняет компилятор, или чаще интерпретатор – программа, в реальном времени выполняющая код программы без его преобразования в машинный код. Декларативные языки программирования чрезвычайно сложны для понимания, программы на них трудно отлаживать из-за неочевидной последовательности выполнения операций, однако они являются наиболее перспективными в области написания систем с искусственным интеллектом.

Важнейшей чертой программ на императивных языках программирования является их структурность, то есть разбиение основной задачи на небольшие подзадачи и их отдельное решение. Есть два пути реализации такой парадигмы: подпрограммы и объекты. В *процедурных языках* основой программ служат подпрограммы, принимающие на вход какие-то данные, производящие с ними определённые действия и возвращающие результаты этих действий. Процедурные языки исторически были первыми языками высокого уровня, к ним относят: Бейсик, Паскаль, Фортран, Си. Совершенно иной подход реализуется в *объектно-ориентированных языках программирования (ООП)*. ООП – это методология программирования, которая помогает организовать сложные программы за счет использования наследования, инкапсуляции и полиморфизма. Инкапсуляция – это механизм, который связывает код и данные, которыми он манипулирует, защищая оба компонента от внешнего вмешательства. Наследование – процесс, в результате которого один объект получает свойства другого. Полиморфизм – свойство, которое позволяет использовать один и тот же интерфейс для общего класса действий. Объект – это набор данных, для которого определены правила поведения, называемые методами, зависящими о того, к какому классу принадлежит данный объект. Это позволяет основную часть времени написания программы находиться в рамках абстрактных понятий, заботясь о конкретной реализации лишь на последнем этапе. К наиболее современным объектно-ориентированным языкам программирования относятся C++ и Java.

*Пакеты прикладных программ (ППП).* ППП – это комплекс взаимосвязанных программ, предназначенный для решения задач определенного класса конкретной предметной области (функциональная подсистема, бизнес-приложение, анализ данных и т.п.). В настоящее время имеется широкий спектр ППП, различающихся по своим функциональным возможностям и способам реализации. Различают следующие типы ППП:

1. общего назначения (универсальные);
2. метод-ориентированные;

3. проблемно-ориентированные;
4. глобальных сетей.

*ППП общего назначения* – универсальные программные продукты, предназначенные для автоматизации разработки и эксплуатации функциональных задач пользователя и информационных систем в целом. К этому классу ППП относят:

- текстовые и графические редакторы (например, MSWord, CorelDraw, Adobe Photoshop и т.п.);

- электронные таблицы (например, MSExcel, Quattro Pro и др.);

- СУБД (например, MSAccess, MSFoxPro, Oracle и др.);

-Case-технологии –совокупность методологий анализа, проектирования, разработки и сопровождения сложных систем программного обеспечения, поддержанную комплексом взаимоувязываемых средств автоматизации(например, Application Development Workbench, CDEZ Tods (Oracle));

- оболочки экспертных систем и систем искусственного интеллекта – это системы обработки знаний в узкоспециализированной области подготовки решений пользователей на уровне профессиональных экспертов(например, Шэлл (Диалог), Expert-Ease и др.).

*Метод-ориентированные ППП* – это ППП, обеспечивающие математические, статистические и другие методы решения задач независимо от предметной области. В их алгоритмической основе реализован какой-либо экономико-математический метод решения задачи. Наиболее распространены методы математического программирования, решение дифференциальных уравнений, имитационного моделирования, исследования операций. Примером таких программ могут служить программы TimeLine, Microsoft Project, MatLab, MathCad, Statistica.

MatLab – ППП для решения задач технических вычислений (разработка алгоритмов, анализ данных и т.п.), и язык программирования, используемый в этом пакете. MatLab является главным инструментом для решения широкого спектра научных и прикладных задач, в таких областях как: моделирование объектов и разработка систем управления, проектирование коммуникационных систем, обработка сигналов и изображений, измерение сигналов и тестирование, финансовое моделирование, вычислительная биология и др. MatLab позволяет максимально просто работать с матрицами реальных, комплексных и аналитических типов данных; со структурами данных и таблицами поиска. Содержит встроенные функции линейной алгебры, быстрого Фурье преобразования, функции для работы с полиномами, функции базовой статистики и численного решения дифференциальных уравнений и др.

Statistica – ППП для всестороннего статистического анализа, разработанный компанией StatSoft. Продукты серии Statistica позволяют решать любые задачи в области анализа и обработки данных. В ППП Statistica реализованы такие алгоритмы математической статистики как: описательная статистика, многомерная линейная и нелинейная регрессия, дискриминантный и кластерный анализ, деревья классификаций, факторный анализ, проверка гипотез о виде распределения, прогнозирование временных рядов на основе одномерных моделей АРПСС.

*Проблемно-ориентированными ППП* называются программные продукты, предназначенные для автоматизации процессов решения какой-либо задачи в конкретной функциональной области. Это наиболее широкий класс пакетов прикладных программ. Практически нет ни одной предметной области, для которой не существует хотя бы одного ППП. Примерами проблемно-ориентированных пакетов могут служить пакеты, предназначенные для реализации информационных технологий обработки данных в конкретных областях, например:

- в бухгалтерской области – это программы автоматизации бухгалтерского учёта «1С: Бухгалтерия», «Парус», «Интеллект-Сервис» и др.;

- в банковской деятельности – это программные продукты, предлагаемые фирмами «Диасофт», «Инверсия», «R-Style» и др.

- информационно-справочные системы, такие, как «Консультант Плюс», «Гарант», «ЮСис» и др.

*ППП глобальных сетей ЭВМ.* Для организации электронной почты, телеконференций, обеспечения секретности передаваемой информации в различных глобальных сетях ЭВМ используются стандартные (в этих сетях) пакеты прикладных программ. Например, стандартные ППП глобальной сети Интернет:

1. средства доступа и навигации – Netscape Navigator, MS Internet Explorer;
2. электронная почта (Mail), например Eudora.

В банковской деятельности широкое распространение получили стандартные ППП, обеспечивающие подготовку и передачу данных в международных сетях SWIFT, Sprint, Reuters.

#### *Имитационные модели, средства их построения и реализации. Использование пакетов программ в научных исследованиях*

В тех случаях, когда исследование систем (объектов, процессов, явлений) методами аналитического моделирования (даже численными) затруднительно или невозможно применяют имитационное моделирование. *Имитационное моделирование* – разработка компьютерных моделей и постановка экспериментов на них с целью принятия обоснованных, целесообразных управлений решений. *Имитационная модель* – это компьютерная программа, которая описывает структуру и воспроизводит поведение реальной системы во времени. С использованием средств имитационного моделирования могут быть решены такие задачи, как: моделирование процессов массового обслуживания с целью определения временных и стоимостных параметров, прогноз финансовых результатов деятельности предприятия и т.п.

Таким образом имитационное моделирование предполагают применение специальных программных средств и языков программирования. Имитационные модели позволяют провести анализ систем любой степени сложности с любой степенью детализации. Однако, такой подход является трудоемким и носит частный характер получаемых результатов.

*Структура имитационных моделей.* Имитационная модель представляет собой комбинацию следующих составляющих: компонент, параметров, переменных, функциональных зависимостей, ограничений и целевых функций. Компоненты – составные части модели, соответствующие элементам реальной системы или её подсистемы. Параметры – величины, которые исследователь, работающий на модели, может задать произвольно. Параметры, после того как они установлены, являются постоянными величинами, не подлежащими изменению. Переменные – величины, которые принимают только значения, определяемые заданной функцией. Переменные разделяются на экзогенные – входные, независимые, существующие вне системы, и эндогенные – выходные, зависимые, порождаемые системой. Функциональные зависимости – соотношения, описывающие поведение переменных и параметров в пределах компоненты или выражающие связи между компонентами системы. Эти соотношения или операционные характеристики по своей природе являются либо детерминированными, либо стохастическими. Оба типа соотношений обычно выражаются в форме математического уравнения, которое устанавливает зависимость между эндогенными переменными и экзогенными, и строятся на основе гипотез или с помощью статистического, либо математического анализа. Ограничения – величины,

которые или устанавливают пределы изменения значений переменных, или ограничивают условия распределения и расходования тех или иных средств (энергии, запасов, времени и т.п.). Ограничения бывают искусственными и естественными. Искусственные ограничения вводятся разработчиком, их можно изменять (например, требования, предъявляемые к системе). Естественные ограничения присущи системе и определяются законами природы. Целевая функция или функция критерия – это точное отображение целей либо задач системы и необходимых правил их выполнения. Критерий – правило или вид проверки, при помощи которого составляется правильное суждение о чём-либо. Функция критерия (целевая функция) направлена на оптимизацию или удовлетворение заданного критерия и должна быть составной частью модели.

Во избежание моделирования избыточного числа деталей следует строить модель, ориентированную на решение вопросов, на которые требуется найти ответы, а не имитировать реальную систему во всех подробностях. Процесс имитации исследуемой системы включает ряд этапов:

1. Структурный анализ процессов. Формулировка цели моделирования. Проводится формализация структуры сложного реального процесса путем разложения его на подпроцессы, выполняющие определенные функции и имеющие взаимные функциональные связи.
2. Разработка концептуальной модели. Формализованное описание модели.
3. Разработка и программная реализация имитационной модели.
4. Проверка адекватности модели.
5. Планирование экспериментов с моделью.
6. Проведение эксперимента для оптимизации определенных параметров реального процесса.
7. Статистическая обработка результатов моделирования.

*Основные направления имитационного моделирования.* В соответствии с одной из классификаций в области имитационного моделирования выделяют следующие основные направления: *моделирование динамических систем*, *дискретно-событийное моделирование*, *системная динамика* и *агентное моделирование*. В каждом из этих направлений развиваются свои инструментальные средства, упрощающие разработку моделей и их анализ.

*Моделирование динамических систем* направлено на исследование сложных объектов, поведение которых описывается системами алгебро-дифференциальных уравнений. Инженерным подходом к моделированию таких объектов была сборка блок-схем из решающих блоков аналоговых компьютеров: интеграторов, усилителей и сумматоров, токи и напряжения, в которых представляли переменные и параметры моделируемой системы. Этот подход и сейчас является основным в моделировании динамических систем, только решающие блоки являются не аппаратными, а программными. Он реализован, например, в инструментальной среде *Simulink* системы компьютерной математики *Matlab*.

*Дискретно-событийное моделирование* – подход к моделированию, предлагающий абстрагироваться от непрерывной природы событий и рассматривать только основные события моделируемой системы, такие как: «ожидание», «обработка заказа», «движение с грузом», «разгрузка» и другие. Дискретно-событийное моделирование наиболее развито и имеет огромную сферу приложений — от логистики и систем массового обслуживания до транспортных и производственных систем. Этот вид моделирования наиболее подходит для моделирования производственных процессов. Реализован в среде моделирования *GPSS*, которая с некоторыми модификациями до сих пор используется для обучения имитационному моделированию.

*Системная динамика* – парадигма моделирования, где для исследуемой системы строятся графические диаграммы причинных связей и глобальных влияний одних параметров на другие во времени, а затем созданная на основе этих диаграмм модель имитируется на компьютере. По сути, такой вид моделирования более всех других парадигм помогает понять суть происходящего выявления причинно-следственных связей между объектами и явлениями. С помощью системной динамики строят модели бизнес-процессов, развития города, модели производства, динамики популяции, экологии и развития эпидемии.

*Агентное моделирование* – относительно новое (1990е-2000е гг.) направление в имитационном моделировании, которое используется для исследования децентрализованных систем, динамика функционирования которых определяется не глобальными правилами и законами (как в других парадигмах моделирования), а наоборот. Когда эти глобальные правила и законы являются результатом индивидуальной активности членов группы. Цель агентных моделей — получить представление об этих глобальных правилах, общем поведении системы, исходя из предположений об индивидуальном, частном поведении ее отдельных активных объектов и взаимодействии этих объектов в системе. Агент — некая сущность, обладающая активностью, автономным поведением, может принимать решения в соответствии с некоторым набором правил, взаимодействовать с окружением, а также самостоятельно изменяться.

В настоящее время одним из инструментов имитационного моделирования нового поколения является пакет *AnyLogic* – отечественный профессиональный инструмент имитационного моделирования, который существенного упрощает разработку моделей и их анализ. *AnyLogic* поддерживает на единой платформе подходы дискретно-событийного и непрерывного моделирования (блок-схемы процессов, системную динамику, агентное моделирование, карты состояний, системы уравнений). Программный инструмент *AnyLogic* основан на объектно-ориентированной концепции. Другой базовой концепцией *AnyLogic* является представление модели как набора взаимодействующих параллельно функционирующих активностей. Под активным объектом в *AnyLogic* понимается объект со своим собственным функционированием, взаимодействующий с окружением. Активный объект может включать в себя любое количество экземпляров других активных объектов, при этом они могут динамически порождаться и исчезать в соответствии с законами функционирования системы. Таким образом, могут моделироваться социальные группы, холдинги компаний, транспортные системы и т.п. Графическая среда моделирования *AnyLogic* поддерживает проектирование, разработку, документирование модели, выполнение компьютерных экспериментов с моделью, включая различные виды анализа – от анализа чувствительности до оптимизации параметров модели относительно некоторого критерия.

*Основные методы имитационного моделирования.* Основными методами имитационного моделирования являются: аналитический метод, метод статического моделирования и комбинированный метод (аналитико-статистический) метод.

Аналитический метод применяется для имитации процессов в основном для малых и простых систем, где отсутствует фактор случайности. Метод назван условно, так как он объединяет возможности имитации процесса, модель которого получена в виде аналитически замкнутого решения, или решения, полученного методами вычислительной математики.

Метод статистического моделирования первоначально развивался как метод статистических испытаний (Монте-Карло). Это – численный метод, состоящий в получении оценок вероятностных характеристик, совпадающих с решением

аналитических задач (например, с решением уравнений и вычислением определенного интеграла). В последствии этот метод стал применяться для имитации процессов, происходящих в системах, внутри которых есть источник случайности или которые подвержены случайным воздействиям. Он получил название метода статистического моделирования.

Комбинированный метод (аналитико-статистический) позволяет объединить достоинства аналитического и статистического методов моделирования. Он применяется в случае разработки модели, состоящей из различных модулей, представляющих набор как статистических, так и аналитических моделей, которые взаимодействуют как единое целое. Причем в набор модулей могут входить не только модули, соответствующие динамическим моделям, но и модули, соответствующие статическим математическим моделям.

*Имитационное моделирование на основе метода Монте-Карло.* В различных задачах, встречающихся при создании сложных систем, могут использоваться величины, значения которых определяются случайным образом. Примерами таких величин являются: случайные моменты времени, в которые поступают заказы на фирму; загрузка производственных участков или служб объекта экономики; ошибки измерений и т.п. При исследовании такого рода используются вероятностные имитационные модели, в которых влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). При этом результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели рассматриваемого процесса, являются случайными реализациями. Поэтому для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных (*статистическое моделирование*). Методику статистического моделирования (статистических испытаний) как правило называют *методом Монте-Карло*. Метод Монте-Карло используют для вычисления интегралов, в особенности многомерных, для решения систем алгебраических уравнений высокого порядка, для исследования различного рода сложных систем (автоматического управления, экономических, биологических и т. д.), например, моделирование поведения системы управления на очень большом промежутке модельного времени (несколько лет).

При вычислениях методом Монте-Карло статистические результаты получаются путем повторяющихся испытаний. В основе вычислений лежит случайный выбор чисел из заданного вероятностного распределения. При практических вычислениях эти числа берут из таблиц или получают путем некоторых операций, результатами которых являются псевдослучайные числа с теми же свойствами, что и числа, получаемые путем случайной выборки. Имеется большое число вычислительных алгоритмов, которые позволяют получить длинные последовательности псевдослучайных чисел.

*Суть метода.* Вместо того, чтобы описывать случайное явление с помощью аналитических зависимостей, производится «розыгрыш» – моделирование случайного явления с помощью некоторой процедуры, дающей случайный результат. В результате «розыгрыша» мы получаем один экземпляр – одну реализацию случайного явления. Произведя такой «розыгрыш» очень большое число раз, мы получим статистический материал – множество реализаций случайного явления, который можно обработать обычными методами математической статистики.

*Общая схема метода Монте-Карло.* Сущность метода Монте-Карло состоит в следующем: требуется найти значение  $a$  некоторой изучаемой величины. Для этого

выбирают такую случайную величину  $X$ , математическое ожидание которой равно  $a$ :  $M(X) = a$ .

Практически же поступают так: производят  $n$  испытаний, в результате которых получают  $n$  возможных значений  $X$ . Далее вычисляют их среднее арифметическое  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$  и принимают  $\bar{x}$  в качестве оценки (приближённого значения)  $a^*$  искомого числа  $a$ :

$$a \approx a^* = \bar{x}.$$

Теория этого метода указывает, как наиболее целесообразно выбрать случайную величину  $X$ , как найти её возможные значения.

Таким образом, метод Монте-Карло состоит из следующих этапов:

1. Моделирование на ЭВМ псевдослучайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей, имитирующих на ЭВМ случайные значения параметров при каждом испытании;
2. Использование полученных числовых последовательностей в имитационных математических моделях.
3. Статистическая обработка результатов моделирования.

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Языки программирования высокого уровня, их особенности и классификация.
2. Пакеты прикладных программ и их классификация.
3. Имитационная модель, ее структура.
4. Имитационное моделирование, его этапы и направления.
5. Методы имитационного моделирования. Метод Монте-Карло.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [4]; [7]; [14].

*Тема: «Вычислительный эксперимент, основы и правила проведения.*

*Статистическое моделирование»*

*Основные понятия темы: «модель-алгоритм-программа», вычислительный эксперимент, этапы и особенности вычислительного эксперимента.*

*Материалы лекций*

*Принципы проведения вычислительного эксперимента. Модель, алгоритм, программа*

Интенсивное развитие информационных технологий и широкое применение методов математического моделирования позволили повысить уровень теоретических и экспериментальных исследований во всех областях знаний. Преимущество математического моделирования заключается в том, что изучается не само явление или процесс, а его модель, что дает возможность достаточно быстро и без больших затрат исследовать свойства и характеристики исследуемого процесса. Основу математического моделирования составляет триада *модель – алгоритм – программа*, определяющая четкий план действий использования методов математического моделирования:

- выбор или построение «эквивалента» объекта, отражающего в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям и т.д.;

- выбор (или разработка) алгоритма для реализации модели на компьютере;
- создание программ, «переводящих» модель и алгоритм на доступный компьютеру язык.

Процесс моделирования сопровождается улучшением и уточнением, по мере необходимости, всех звеньев численного эксперимента. *Вычислительный эксперимент* – методология исследования сложных научных проблем, основанная на построении и анализе с помощью ЭВМ математических моделей изучаемых объектов. Применение вычислительного эксперимента позволяет расширить области экспериментальных (например, исследование недоступных объектов) и теоретических исследований (новые методы описания моделей (алгоритмическое описание), применение методов оптимального проектирования для поиска параметров объекта исследования с наилучшими характеристиками).

Вычислительный эксперимент предназначен для изучения, прогнозирования, оптимизации сложных многопараметрических нелинейных процессов, теоретическое и экспериментальное исследование которых традиционными методами затруднено или требует больших временных и финансовых затрат (например, термоядерный синтез, освоение космического пространства, проектирование и исследование химических и др. производств).

Проведение вычислительного эксперимента можно условно разделить на два этапа. После первого этапа вычислительного эксперимента, если надо, модель уточняется как в направлении ее усложнения (учет дополнительных эффектов и связей в изучаемом явлении), так и упрощения (выяснение, какими закономерностями и связями в изучаемом явлении можно пренебречь). На последующих этапах цикл вычислительного эксперимента повторяется до тех пор, пока исследователь не убеждается, что модель адекватна тому объекту, для которого она составлена.

*Этапы вычислительного эксперимента.* Основные этапы вычислительного



эксперимента представлены на рис. 1. На первом этапе вычислительного эксперимента строится модель исследуемого объекта (процесса, явления), отражающая в математической форме важнейшие его свойства – законы, которым он подчиняется. Математическая модель исследуется традиционными аналитическими средствами прикладной математики для получения предварительных знаний об объекте. Таким образом, на первом этапе проводится

предварительный анализ исследуемого объекта (процесса, явления) и построение математической модели (составление уравнений, описывающих исследуемое явление).

Второй этап связан с выбором (или разработкой) вычислительного алгоритма для реализации модели на компьютере. Задачами данного этапа являются: построение дискретной модели, аппроксимирующей исходную математическую задачу, построение разностной схемы, разработка (или выбор) вычислительного алгоритма и т. д.

На третьем этапе создается программное обеспечение, реализующее вычислительные алгоритмы на одном (или нескольких) алгоритмическом языке высокого уровня.

Четвертый этап связан с проведением расчетов и обработкой полученной информации (диагностики). На пятом этапе проводится анализ результатов расчетов, их сравнение (если это возможно) с результатами натурного эксперимента.

Как правило, после создания первой версии программы и анализа полученных результатов, может выясниться, что построенная модель недостаточно хорошо отражает особенности исследуемого явления. В этом случае модель корректируется, вносятся

соответствующие поправки в численные методы и реализующие их программы и выполняется новый расчет. Тем самым цикл вычислительного эксперимента воспроизводится в полном объеме. При анализе результатов могут быть выявлены какие-либо недостатки используемых численных методов, связанные, в частности, с соображениями точности или эффективности. Изменение методов и алгоритмов влечет за собой изменение соответствующих программ. Иначе говоря, цикл повторяется в несколько сокращенном виде (этапы 2–5). Кроме того, может оказаться неудачным некоторое программное решение, например, представление данных. Заметим, что важным этапом является оптимизация программы с точки зрения эффективности расчета. Пересмотр таких решений приводит к повторению этапов 3–5.

*Особенности вычислительного эксперимента.* Одной из особенностей вычислительного эксперимента является его универсальность, которая позволяет легко переносить эту технологию на исследование других объектов. Это обстоятельство характерно вообще для математического моделирования и порождено тем, что многие явления и процессы имеют одни и те же математические модели. Например, моделирование плазменных процессов и моделирование галактик проводится одним и тем же методом – методом частиц в ячейке.

Кроме того, методологическая универсальность вычислительного эксперимента позволяет на основе накопленного опыта математического моделирования, банка вычислительных алгоритмов и программного обеспечения быстро и эффективно решать новые задачи.

Другой особенностью вычислительного эксперимента как технологии научных исследований является его междисциплинарный характер, объединяющий такие области знаний как фундаментальная и прикладная математика, программирование.

Вычислительный эксперимент имеет преимущества и перед натурным экспериментом. Он может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент невозможен (например, экологические эксперименты). Вычислительный эксперимент гораздо дешевле натурного, при его использовании значительно снижается стоимость разработок и экономится время.

*Вопросы для самоконтроля:*

1. Понятие вычислительного эксперимента.
2. Этапы вычислительного эксперимента.
3. Особенности вычислительного эксперимента.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [5]; [6]; [7], [8], [12].

*Вопросы для самостоятельного изучения:*

1. Построение и реализация статистических моделей.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [5]; [6]; [7], [8], [12].

## ***2.2 Содержание практических занятий***

### ***Раздел 1. Математические основы моделирования***

*Тема: «Численные методы и их применение в научных исследованиях»*

*Практическое занятие 1:* Численные методы и их применение в научных исследованиях.

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Сплайн-аппроксимация, примеры решения задач.
2. Численные методы вейвлет-преобразования: кратномасштабный анализ, алгоритм быстрого вейвлет-разложения, вейвлет-пакеты, выбор численного алгоритма и его сходимость.
3. Примеры применения численных методов при математическом моделировании.

*Задание.* Подготовка материала по теме «Сплайн-аппроксимация» с примерами практического применения (в области диссертационного исследования). Подготовка примеров практического применения методов вейвлет-преобразования (кратномасштабный анализ, вейвлет-пакеты) для реальных временных рядов: анализ результатов.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [8]; [9]; [12].

*Практическое занятие 2: Спектральные методы, примеры применения методов.*

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Преобразования Фурье, Лапласа, Хаара.
2. Вейвлет-преобразование: непрерывное и дискретное вейвлет-преобразование, типы вейвлет-базисов и критерии его выбора.
3. Применение спектральных методов при решении практических задач.

*Задание.* Подготовка к тестированию по теме. Подготовка материала по теме «Преобразование Хаара». Подготовка примеров практического применения непрерывного вейвлет-преобразования для реальных временных рядов.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [8]; [9]; [12].

*Практическое занятие 3: Экстремальные задачи и методы их решения*

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Общая характеристика экстремальных задач и методов их решения. Виды экстремальных задач.
2. Постановка задачи линейного программирования, ее различные формы.
3. Минимаксный подход и его применение в научных исследованиях.

*Задание:* подготовка материала по теме «Графический метод решения задач линейного программирования» на примере реальных задач. Рассмотреть примеры практического применения симплекс-метода.

Подготовка материала по теме «Задачи на минимакс. Примеры применения в научных исследованиях (в области диссертационного исследования)».

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [6].

*Тема: «Элементы теории вероятностей и математической статистики. Применение методов математической статистики при решении научных задач»*

*Практическое занятие 4: Теория случайных процессов, основные подходы и методы.*

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Регрессионный анализ, основные подходы и области применения.
2. Класс моделей авторегрессии-проинтегрированного скользящего среднего.

*Задание.* Подготовка материала по теме «Множественная регрессия. Оценка параметров множественной регрессии на примере реальных временных рядов»

*Практическое занятие 5: Проверка статистических гипотез.*

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Статистические гипотезы: основные понятия, ошибки 1- и 2-рода, шаги проверки гипотез, вывод о принятии или отверждении основной гипотезы.
2. Критерии проверки статистических гипотез: t-критерий Стьюдента, F-критерий Фишера, хи-квадрат Пирсона.
3. Рассмотрение примеров проверки статистических гипотез.

*Задание.*

1. Подготовка к тестированию.
2. Подготовка материала по теме «Основные понятия статистической гипотезы. Проверка статистических гипотез».
3. На основе F-критерия Фишера проверить гипотезу о совпадении оцененных моделей для отдельных групп наблюдений.

После взятия первых разностей исходных временных рядов (см. табл) получены модели  $z^1(t)$ ,  $z^2(t)$ . Сделать вывод о возможности применения общей модели  $z^{общ}(t)$  для представленных временных рядов.

$$z^1(t) = -0,925z_{t-1}^1 - 0,938z_{t-2}^1$$

$$z^2(t) = -0,849z_{t-1}^2 - 0,783z_{t-2}^2$$

$$z^{общ}(t) = -0,876z_{t-1}^{общ} - 0,851z_{t-2}^{общ}$$

$z^1(t)$		$z^2(t)$	
1-27	28-54	1-27	28-53
14.69	12.75	16.52	14.07
12.52	11.75	16.38	13.80
7.92	5.68	17.98	15.92
15.75	12.91	15.43	15.39
11.60	13.49	16.07	14.52
6.08	8.18	19.17	17.48
13.55	12.98	15.21	14.73
12.55	14.14	14.71	14.21
6.67	10.86	17.64	16.34
12.86	13.13	15.33	13.70
11.70	13.17	14.24	13.96
6.92	6.54	17.27	15.80
12.01	13.19	14.66	13.06
12.64	12.80	14.48	14.00
9.27	8.42	16.71	16.84

14.00	13.64	14.05	14.27
12.03	12.52	14.72	14.96
6.48	5.81	15.86	15.60
11.79	13.26	16.61	14.03
11.41	12.97	14.58	14.06
6.32	7.78	15.69	16.91
12.77	13.44	18.12	15.76
12.80	13.07	15.26	14.71
6.54	5.95	16.57	16.91
12.12	13.25	13.30	15.90
12.68	12.66	13.62	15.40
6.05	7.24	15.76	

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [6], [16].

## **Раздел 2. Методы математического моделирования**

*Тема:* «Основные принципы математического моделирования»

*Практическое занятие 6: Методы построения математических моделей*

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Построение элементарных математических моделей.
2. Построение стохастических моделей: идентификация, начальные оценки, оценивание.
3. Идентификация и оценка параметров авторегрессионной модели на примере реальных временных рядов.

*Задание.*

1. Подготовка к тестированию.
2. Для представленного в табл. временного ряда построить авторегрессионные модели: идентифицировать порядок модели, определить начальные (используя уравнения Юла-Уокера) и эффективные оценки параметров (исследуя функцию правдоподобия).

<b>1-15</b>	<b>15-30</b>	<b>31-45</b>	<b>46-60</b>	<b>61-70</b>
47	44	50	62	68
64	80	71	44	38
23	55	56	64	50
71	37	74	43	60
38	74	50	52	39
64	51	58	38	59
55	57	45	59	40
41	50	54	55	57
59	60	36	41	54
48	45	54	53	23
71	57	48	49	
35	50	55	34	

57	45	45	35	
40	25	57	54	
58	59	50	45	

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [6]; [13].

*Тема:* «Методы исследования математических моделей»

*Практическое занятие 7: Исследование математических моделей*

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Методы диагностических проверок стохастических моделей: введение избыточных параметров, совокупный критерий согласия, кумулятивная периодограмма.
2. Методы системного анализа для исследования моделей объектов в условиях неполной априорной определенности.
3. Методы системного анализа для изучения существенно нестационарных объектов и систем.

*Задание.*

1. Подготовка к тестированию.
2. Подготовка материала по теме «Методы системного анализа для исследования моделей объектов в условиях неполной априорной определенности»
3. Подготовка материала по теме «Методы системного анализа для изучения существенно нестационарных объектов и систем»
4. Для идентифицированной на практическом занятии 6 модели выполнить диагностические проверки, используя анализ АКФ ряда остаточных ошибок и совокупный критерий согласия.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [6]; [10]; [12], [16].

*Тема:* «Математические модели в научных исследованиях»

*Практическое занятие 8: Современные подходы и методы математического моделирования*

*Вопросы, выносимые на обсуждение:*

1. Современные подходы к построению моделей, основанные на совмещении традиционных методов анализа временных рядов и современных методов цифровой обработки сигналов.
2. Многокомпонентные модели временных рядов сложной структуры: идентификация, оценка, диагностика.

*Задание.* Подготовка материала на тему «Современные модели реальных данных сложной структуры. Методы декомпозиции» для обсуждения на практическом.

*Литература:* [1]; [2]; [3]; [7]; [8]; [10].

### **Раздел 3. Компьютерные технологии в моделировании**

*Тема: «Алгоритмические языки и программные средства»*

*Практическое занятие 9: Имитационное моделирование, средства создания имитационных моделей*

Вопросы, выносимые на обсуждение:

1. Построение имитационных моделей сложных объектов и систем.
2. Современные средства создания и реализации имитационных моделей.

*Задание.* Подготовка к тестированию. Подготовка материала по теме практического занятия.

*Литература:*[1]; [2]; [3]; [4]; [7]; [14].

## **3. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ**

### **3.1. Методические рекомендации по изучению курса**

В основу отбора тем для изучения курса были положены компетенции, установленные федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования направления подготовки 09.06.01 «Информатика и вычислительная техника» (уровень подготовки кадров высшей квалификации). Особенностью курса является определенная последовательность рассмотрения тем, которые выбраны для изучения на лекционных и на практических занятиях.

Теоретические и дискуссионные вопросы, выносимые на практические занятия, задания, задачи позволяют закрепить, расширить и углубить знания, полученные на лекционных занятиях.

Такая последовательность позволяет получить соответствующие знания в области математического моделирования, численных методов и программирования. Все это позволит обучающимся в дальнейшем применять полученные знания на практике в своей профессиональной деятельности. Предложенная последовательность изучения курса позволяет овладеть категориальным аппаратом, навыками приобретения, пополнения и реализации знаний, необходимых исследователю и управленцу в рассматриваемой предметной области и в целом изучить курс в соответствии с требованиями к его освоению.

Целесообразен следующий механизм работы обучающегося:

1. Прежде чем приступить к изучению курса внимательно изучите содержание и структуру данных методических указаний.
2. Перед лекцией прочтите и уясните тему и содержание лекции.
3. Прочтите конспект прослушанной лекции, проработайте рекомендуемую основную и дополнительную литературу по теме.
4. Изложите свое понимание темы.
5. Выявите дискуссионные вопросы и сформулируйте свою точку зрения на них, аргументируя ее.
6. После ознакомления с теоретическим материалом ответьте на вопросы для самоконтроля.
7. Закрепление материала проводится на практических занятиях или в результате самостоятельной работы. Каждая тема курса должна быть «проработана» обучающимся в той или иной форме.

### **3.2. Методические рекомендации по подготовке к практическим занятиям**

Значительную роль в изучении предмета выполняют практические занятия, которые призваны, прежде всего, закреплять теоретические знания, полученные в ходе прослушивания и запоминания лекционного материала, ознакомления с учебной и

научной литературой, а также выполнения самостоятельных заданий. Практические занятия способствуют получению наиболее качественных знаний , помогают углубить навыки самостоятельной работы.

Приступая к подготовке темы практического занятия, необходимо, прежде всего, внимательно ознакомиться с его планом. Затем необходимо изучить соответствующие конспекты лекций , главы учебников и методических пособий , разобрать примеры, ознакомиться с дополнительной литературой (справочниками, энциклопедиями, словарями, диссертационными работами по близкой тематике). К наиболее важным и сложным вопросам темы желательно составлять конспекты ответов. Конспектирование дополнительных источников, особенно освещающих вопросы изучаемой темы НИР также способствует более плодотворному усвоению учебного материала.

Следует готовить все вопросы соответствующего занятия. При этом необходимо уметь давать определения основным понятиям, знать основные положения теории, правила и формулы, предложенные для запоминания. Это помогает понять построение изучаемого материала, выделять в нем основные моменты и уметь видеть связь явлений и их причинно-следственные связи. Ведение записей, особенно сделанных в электронном виде, способствует превращению чтения в активный процесс, мобилизует, наряду со зрительной, и моторную память. Следует помнить: у аспиранта, систематически ведущего записи по мере проработки лекций , самостоятельной подготовки тем, подготовки к практическим занятиям , создается свой индивидуальный фонд подсобных материалов для быстрого повторения прочитанного, для мобилизации накопленных знаний. Особенно важны и полезны записи тогда, когда в них находят отражение мысли, возникшие при самостоятельной работе в ходе подготовки к практическим занятиям.

Подготовка к практическому занятию является важной формой самостоятельной работы аспиранта. Она должна носить систематический и планомерный характер . После лекции аспирант должен познакомиться с планом практических занятий и списком обязательной и дополнительной литературы, которую необходимо прочитать, изучить и конспектировать. Разъяснение по вопросам новой темы аспиранты получают у преподавателя в конце предыдущего практического занятия.

Подготовка к практическому занятию требует, прежде всего, чтения рекомендуемых источников и монографических работ, их реферирования, подготовки докладов и сообщений. Важным этапом в самостоятельной работе аспиранта является повторение материала по конспекту лекции. Одна из главных составляющих внеаудиторной подготовки – работа с книгой. Она предполагает внимательное прочтение, критическое осмысление содержания, обоснование собственной позиции по дискуссионным моментам, постановки интересующих вопросов, которые могут стать предметом обсуждения на практическом занятии.

### **3.3. Методические рекомендации по подготовке к кандидатскому экзамену**

В рамках учебного процесса аспирантуры подготовке к кандидатскому экзамену по специальности принадлежит особо важное место, поскольку он является наиболее значимым показателем квалификации выпускника аспирантуры, уровня самостоятельности научного мышления, эрудиции будущего кандидата наук, преподавателя и исследователя. Именно поэтому экзамен по специальности завершает цикл кандидатских экзаменационных испытаний, а вслед за его сдачей аспирант вступает в стадию написания самой кандидатской диссертации.

Освоение основной программы следует начать с изучения материалов

университетских учебников и специальных работ в области математического моделирования и программирования. Однако, освоение содержащегося в учебнике материала представляет собой лишь начальную стадию подготовки к экзамену, поскольку он решает качественно иные задачи. Ответ экзаменующегося на этом экзамене должен существенно отличаться от ответа студента и по содержанию, и по внутренней структуре. Обязательным требованием к ответу на любой вопрос программы является характеристика степени его изученности в научной литературе. При этом важно показать не только знание современного состояния изученности того или иного вопроса, но и историю его изучения, ученых, внесших вклад в развитие соответствующей области знаний.

В ходе ответа необходимо выделить наиболее дискуссионные и недостаточно изученные моменты для данной тематики. При ответе на вопрос следует обратить особое внимание на литературный стиль изложения, правильное понимание объема понятий и научных терминов по данной тематике.

Экзаменационный билет включает в себя три вопроса. Каждый билет составлен при этом таким образом, чтобы проверить знания аспиранта по разным разделам программы. Экзаменаторы имеют право задать аспиранту дополнительные вопросы по завершении им ответа, имеющие целью уточнить оставшиеся неясными моменты, а также составить более полное представление об уровне его подготовки. Дополнительные вопросы могут быть связанными с проблематикой вопросов экзаменационного билета, однако члены экзаменационной комиссии имеют также право задать любой вопрос, присутствующий в содержании программы экзамена.

Итоговая оценка складывается из ответов на все вопросы билета, при условии, что все они положительные. Она выносится членами экзаменационной комиссии после совещания и затем доводится до сведения аспиранта.

### **3.4. Вопросы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (к экзамену по кандидатскому минимуму)**

1. Понятие меры и интеграла Лебега. Метрические и нормированные пространства. Пространства интегрируемых функций.
2. Линейные непрерывные функционалы. Линейные операторы.
3. Элементы спектральной теории.
4. Дифференциальные и интегральные операторы.
5. Экстремальные задачи в евклидовых пространствах.
6. Математическое программирование, линейное программирование, выпуклое программирование.
7. Минимаксный подход. Метод апостериорного риска. Задачи на минимакс.
8. Аксиоматика теории вероятностей. Вероятность, условная вероятность. Независимость. Случайные величины и векторы.
9. Элементы корреляционной теории случайных векторов. Элементы теории случайных процессов. Точечное и интервальное оценивание параметров распределения.
10. Элементы теории проверки статистических гипотез. Элементы многомерного статистического анализа.
11. Основные понятия теории статистических решений. Основы теории информации.

12. Общая проблема решения. Функция потерь. Байесовский и минимаксный подходы. Метод последовательного принятия решения.
13. Интерполяция и аппроксимация функциональных зависимостей.
14. Численное дифференцирование и интегрирование. Численные методы поиска экстремума.
15. Вычислительные методы линейной алгебры. Численные методы решения систем дифференциальных уравнений.
16. Сплайн-аппроксимация, интерполяция, метод конечных элементов.
17. Преобразования Фурье, Лапласа, Хаара и др.
18. Численные методы вейвлет-анализа.
19. Принципы проведения вычислительного эксперимента. Модель, алгоритм, программа.
20. Представление о языках программирования высокого уровня. Пакеты прикладных программ.
21. Элементарные математические модели в механике, гидродинамике, электродинамике. Универсальность математических моделей.
22. Методы построения математических моделей на основе фундаментальных законов природы.
23. Вариационные принципы построения математических моделей.
24. Методы исследования математических моделей. Устойчивость. Проверка адекватности математических моделей.
25. Математические модели в статистической механике, экономике, биологии. Методы математического моделирования измерительно-вычислительных систем.
26. Модели динамических систем. Особые точки. Бифуркции. Динамический хаос.
27. Эргодичность и перемешивание. Понятие о самоорганизации. Диссипативные структуры. Режимы с обострением.

#### **4. УЧЕБНО – МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ**

##### ***4.1. Основная литература***

1. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем. Учебник для вузов. М.: Высш. шк., 2001.- 343 с.
2. Самарский А.А. Михайлов А.П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. 2-е изд., испр. — М.: Физматлит, 2002. — 320 с.

##### ***4.2. Дополнительная литература***

3. Вержбицкий В.М. Основы численных методов: учебник. – М.: Высшая школа, 2002. – 840 с.
4. Суворова Н.И. Информационное моделирование. Величины, объекты, алгоритмы. – М.: Лаборатория Базовых Знаний, 2002. – 128 с.

5. Теория вероятностей и математическая статистика. Математические модели / В.Д. Мятлев и др. – М.: Академия, 2009. – 320 с.
6. Гультьяев А.К. MatLab 5.2. Имитационное моделирование в среде Windows. – СПб.: Корона-принт, 1999. – 288 с.
7. Дьяконов В. MATLAB. Обработка сигналов и изображений: спец. справочник / В. Дьяконов, И. Абраменко. – СПб: Питер, 2002. – 608 с.
8. Дьяконов В. MATLAB. Анализ, идентификация и моделирование систем: спец. справочник / В. Дьяконов, В. Круглов. – СПб: Питер, 2002. – 448 с.

#### **4.3. Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»**

9. Качала В.В. Основы теории систем и системного анализа, 2-е изд., 2016г. [электронный ресурс]. – Издательство Лань. - ЭБС ЛАНЬ/
10. Срочко В.А. Численные методы. Курс лекций: учебник для ВУЗов [Электронный ресурс] – СПб.: Лань, 2010. – 208 с.
11. Косарев Е.Л. Методы обработки экспериментальных данных, 2-е изд., 2008 г." - коллекция "Информатика - Издательство "Физматлит" ЭБС ЛАНЬ.
12. Ожиганов А.А. Теория автоматов. Учебное пособие, 2013 г." [Электронный ресурс] - коллекция "Инженерно-технические науки - НИУ ИТМО (Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет информационных технологий, механики и оптики)" ЭБС ЛАНЬ.
13. Казаков Ю.М., Тищенко А.А.. Кузьменко А.А., Леонов Ю.А., Леонов Е.А. Методология и технология проектирования информационных систем, 2018 г. – коллекция "Информатика — Издательство "ФЛИНТА" ЭБС ЛАНЬ
14. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа, 7-е изд., 2009 г. - коллекция "Математика -издательство Физматлит" ЭБС ЛАНЬ.
15. Королев В.Ю., Бенинг В.Е., Шоргин С.Я. Математические основы теории риска, 2-е изд., 2011 г. - коллекция "Математика -Издательство Физматлит" ЭБС ЛАНЬ.
16. Мартинсон Л.К., Малов Ю.И. Дифференциальные уравнения математической физики, 4-е изд., 2011 г.- коллекция "Математика -Издательство МГТУ им. Н.Э.Баумана" ЭБС ЛАНЬ